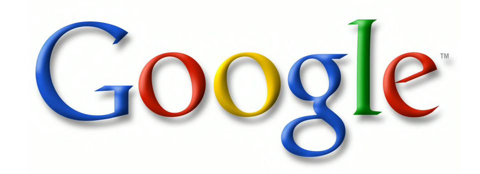
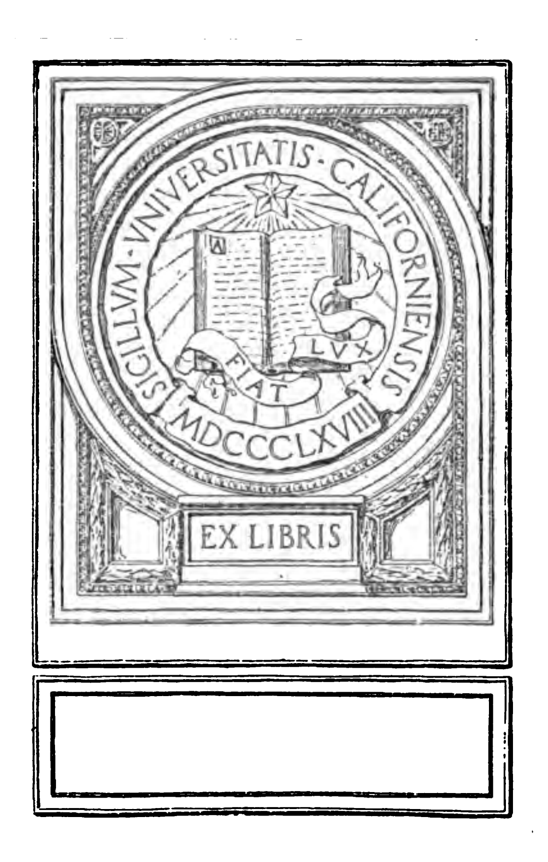
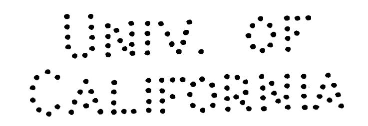



UC-NRLF
$B 86 784
HA
33
L4


SIGILLVM · UNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS





Zur

Theorie der Massenerscheinungen

in der

menschlichen Gesellschaft.

PROGRAMM

zur Uebernahme des Lehrstuhles der cameralistischen Fächer

an der Grossherzoglich Badischen Universität

Freiburg

von

W. Lexis,

Dr. der Staatswissenschaften und der Philosophie.

Freiburg i. B.

Fr. Wagner'sche Buchhandlung.

1877.

Vorbemerkung.

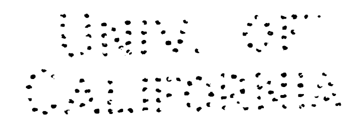
Die vorliegende Schrift enthält ausser einer Fortsetzung meiner Untersuchungen über das Geschlechtsverhältniss der Geborenen den Versuch einer neuen Theorie auf dem Gebiete der Sterblichkeitserscheinungen. Zugleich aber ist die Tragweite der bei diesen Untersuchungen angewandten Methode aus allgemeineren Gesichtspunkten erörtert worden und dadurch eine Skizze der theoretischen Statistik als einer selbständigen Wissenschaft entstanden. Natürlich konnte wegen des Zweckes der Abhandlung als akademischer Gelegenheitsschrift dieser allgemeine Theil nur andeutungsweise behandelt werden.

Freiburg, im Mai 1877.

Der Verfasser.

Berichtigung.

S. 49 Z. 7 v. o. statt 38.8 lies 42.8 und dem entsprechend in der folgenden Zeile statt 19.4 „21.4“.



I. Allgemeinste Eintheilung der Massenerscheinungen.

1. Der Zustand einer menschlichen Gemeinschaft wird einestheils bedingt durch die positiven Gestaltungen und Normen der Gesellschaft und des Staates, die historisch geworden sind und deren Aenderungen historische Ereignisse bilden; andererseits aber auch durch das gewöhnliche, relativ stetige Thun und Leiden der Individuen in ihrer mannigfaltigen Gruppirung, das in seinen einzelnen Elementen nicht festgehalten werden kann, aber charakteristische, der wissenschaftlichen Beobachtung zugängliche Massenerscheinungen erzeugt. Die Statistik hat die selbständige Aufgabe, diese Massenerscheinungen des Menschenlebens nach exacter Methode aufzufassen und zu untersuchen, und es folgt schon aus dieser Definition, dass die Grundlage ihrer Methode das Zählen der Einzelfälle einer Erscheinung bildet, da sie ja nicht, wie die Geschichte, die Individualität der Ereignisse betrachtet, sondern dieselben nur als Glieder einer Masse, als Einheiten einer Summe registrirt. Die statistische Methode findet auch in den Naturwissenschaften fruchtbare Verwendung; aber es scheint doch zweckmässig, den Namen Statistik ausschliesslich der Wissenschaft vorzubehalten, welche jene Methode — deren Wesen im Folgenden genauer hervortreten wird — auf die Untersuchung der Massenerscheinungen des gesellschaftlichen Menschenlebens anwendet.

Sehr verfehlt jedoch wäre es, wenn man alle menschlichen Massenerscheinungen lediglich vom statistischen Gesichtspunkte betrachten wollte. Denn viel wichtiger als die Aufhebung des Einzelereignisses in einer concreten Summe ist die Aufhebung desselben in einer begrifflichen Verallgemeinerung. Wenn die Einzelereignisse nur individuelle Erscheinungen derselben Gattung sind, und wir diese Gattung des Geschehens aus einer Ursache oder einem

Ursachensystem begreifen können, so ist offenbar dieser abstracte *Begriff* des Ereignisses wissenschaftlich von grösserem Interesse, als die Zählung seines concreten Vorkommens.

Eine solche begriffliche, generische Auffassung der menschlichen Massenerscheinungen aber ist namentlich dann möglich, wenn wir, gestützt auf psychologische Erwägungen, Selbstbeobachtungen oder alltägliche Erfahrungen, in jedem Einzelereignisse die gleiche überwiegend wirksame Ursache, insbesondere also in jeder zu der Masse beitragenden Einzelhandlung die gleiche durchschlagende Triebfeder zu erkennen vermögen.

So tritt uns auf dem Gebiete des wirthschaftlichen Lebens als überwiegendes Motiv des individuellen menschlichen Handelns das Selbstinteresse entgegen. Kennen wir nun erfahrungsmässig die allgemeinen Formen der Verhältnisse, unter denen diese Triebfeder zur Wirksamkeit gelangt, so können wir auch allgemein die Gattungen oder Typen der wirthschaftlichen Ereignisse ableiten, von denen jeder in einer grossen Zahl von Einzelfällen, in einer Massenerscheinung des Menschenlebens auftritt. Die statistische Feststellung der Thatsachen dient in solchen Fällen nur zur Präcisirung einer concreten Wirklichkeit, während die Abstraction einen Satz aufstellt oder doch aufzustellen sucht, der in *allen* Fällen sich bewahrheiten soll, in denen bestimmte Bedingungen erfüllt sind.

Wenn an der Berliner Börse der Wechselcurs auf Paris über 81.40 hinausgeht, so darf man behaupten, dass *alle* deutschen Banquiers, die überhaupt auf Arbitrage-Operationen eingerichtet sind, Gold nach Paris senden. Diese Goldsendungen bilden eine wirthschaftlich bedeutsame Massenerscheinung, und die Ermittlung ihres Gesammtbetrags ist ohne Zweifel von praktischem Interesse. Für die theoretische Wissenschaft aber genügt es, nach allgemeinen Erwägungen die Bedingungen festzustellen, unter denen eine Goldausfuhr aus einem gegebenen Lande stattfinden wird, und daneben ist durch einige zahlenmässige Beispiele darzuthun, wie weit die Wirklichkeit den theoretischen Voraussagungen entspricht.

2. Für die Volkswirthschaftslehre hat also die statistische Untersuchung nur die Bedeutung eines Control- oder Berichtigungs-Verfahrens. Die aus den Einzelerscheinungen abgezogenen allgemeinen Sätze stimmen nämlich mit den Massenerscheinungen der Wirklichkeit nie genau überein; denn einerseits haben die wirk-

lichen Verhältnisse, unter denen das wirthschaftliche Selbstinteresse sich bethätigt, einen mannigfaltigeren und reicheren Inhalt, als die abstracten Typen derselben; und andererseits handeln die Menschen selbst in wirthschaftlichen Dingen keineswegs ausschliesslich unter der Leitung ihres Selbstinteresses. Die Statistik gibt uns nun zahlenmässige Anhaltspunkte sowohl zur Beurtheilung des Grades, in welchem die wirklichen wirthschaftlichen Massenerscheinungen den abstracten Typen derselben entsprechen, als auch zur richtigen Schätzung der Tragweite der beobachteten Abweichungen von den theoretischen Voraussehungen.

Statistische Zahlenreihen können auch dazu dienen, in exacter Weise die historische Entwicklung einer speciellen wirthschaftlichen Erscheinung darzustellen, wie z. B. das Aufblühen der englischen Baumwollfabrikation, der Kohlen- oder Eisenindustrie in diesem Jahrhundert.

Man kann ferner durch statistische „Reactionen“ — um einen Ausdruck Engels zu gebrauchen — vermuthete Beziehnngen zwischen verschiedenen Reihen wirthschaftlicher Erscheinungen bestätigen; aber die Volkswirthschaftslehre sieht in solchen Nachweisen nur insofern einen Gewinn, als sie den statistisch beobachteten Zusammenhang aus allgemeinen Gründen zu erklären vermag.

Aus dem volkswirthschaftlich-statistischen Material für sich allein lässt sich also keine besondere Wissenschaft aufbauen; es wird nur dadurch fruchtbar, dass wir es mit unsern sonstigen Erfahrungen über die Natur des gesellschaftlichen und wirthschaftenden Menschen verbinden.

Noch weniger natürlich kann in den eigentlich socialen und politischen Wissenschaften die Statistik eine selbständige Rolle spielen. Ueberhaupt tritt sie auch als Hülfswissenschaft um so mehr zurück, je mehr sich die betrachteten Massenerscheinungen historisch individualisiren, und je vollkommener wir das Princip, das in der Masse jeder Einzelerscheinung zu Grunde liegt, die Ideen und Zwecke, die der menschliche Geist in der Geschichte zu verwirklichen strebt, zu erkennen im Stande sind.

3. Gleichwohl kann die Statistik als Wissenschaft von den menschlichen Massenerscheinungen auf einem bestimmten, wenn auch engen Gebiete selbständig auftreten. Denn es gibt Massenerscheinungen, deren wissenschaftliches Interesse zunächst nur in ihren numerischen Verhältnissen liegt. Eine blosse Abstraction aus

den Einzelereignissen würde in diesen Fällen einen zu geringen Inhalt haben, da das Gemeinsame der Einzelerscheinungen lediglich in dem gleichen Endresultate liegen würde, während z. B. die Einzelvorgänge einer wirthschaftlichen Massenerscheinung nicht nur in ihrem Resultate, sondern auch in ihrer Verursachung und in ihrem Verlauf eine wissenschaftlich fassbare Gemeinsamkeit zeigen. In dem oben angeführten Beispiele handeln alle Banquiers nach demselben Motive, nach derselben Berechnung und mit demselben Resultat, und ein ähnliches Handeln wird sich unter gleichen Bedingungen immer wiederholen. Und eben desswegen kann man hier von einem typischen Geschehen, von einer Gattungserscheinung sprechen, die auch ohne numerische Präcisirung ein wissenschaftliches Interesse besitzt.

Wenn man aber z. B. sagt: „Von den Geborenen einer gewissen Zeitstrecke sterben viele im ersten Lebensjahre“, so ist dies ein wissenschaftlich bedeutungsloser Satz. Die Einzelereignisse, die Sterbefälle, kommen, sogar wenn sie durch dieselbe Krankheit verursacht sind, auf so mannigfaltige Art zu Stande, dass wir durch Abstraction nur zu der leeren Thatsache der Häufigkeit der Sterbefälle gelangen. Um eine neue Einsicht zu erlangen, müssen wir die beobachteten Massen numerisch bestimmen. Und da zeigt sich denn, dass das Verhältniss der Zahl der Gestorbenen zu der Zahl der Geborenen für verschiedene Generationen ziemlich constant bleibt. So finden wir trotz unserer Unwissenheit über die Entstehung der Einzelfälle einen bedeutsamen, verhältnissmässig allgemeinen Satz über die Massenerscheinung, während in dem volkswirthschaftlichen Beispiele der allgemeine Satz aus unserer Kenntniss des typischen Verlaufs des Einzelvorganges entsprang.

4. Somit zerfallen alle menschlichen Massenerscheinungen zunächst in zwei Classen: die einen, die man als „generische“ bezeichnen kann, bestehen aus Einzelfällen eines generisch gleichartigen Geschehens, das für sich wissenschaftlich erheblich und erklärlich ist; der Ausdruck und die Erklärung dieses generischen Geschehens ist hier das wesentliche Resultat der Wissenschaft; die Statistik aber dient als Hülfswissenschaft, um dasselbe zahlenmässig zu controliren und zu präcisiren. Die Massenerscheinungen der anderen Classe aber, welche wir die „concreten“ nennen wollen, bestehen aus Einzelfällen, deren Gleichartigkeit wir nur in dem gleichen Endergebniss finden. Jedes Einzelereigniss steht zwar in

einer streng geschlossenen Kette der Causalität, die man auch in jedem gegebenen Falle nachweisen könnte; aber die vorhandenen Ursachensysteme sind so zahlreich und mannigfaltig, dass uns das Zusammentreffen der Einzelfälle nur als Zufall erscheint. Hier werden die Einzelfälle für uns blosse Einheiten einer Gesammtzahl, das Zählen der Massen wird Hauptzweck, die Statistik tritt in ihre selbständigen Rechte ein und hat zu zeigen, wie sich die grossen Zahlen zur Erweiterung unserer wissenschaftlichen Einsicht in die Erscheinungen verwerthen lassen. Sie führt ihre Untersuchung mittelst einer besonderen Methode, die hauptsächlich durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben wird. Diese Art der Untersuchung kann übrigens auch auf die generischen Massenerscheinungen angewandt werden, jedoch werden solche Versuche mehr ein methodologisches, als sachliches Interesse bieten.

Häufig lassen sich übrigens die gegebenen Massenerscheinungen in mehrere Partialmassen zerlegen, von denen jede einzelne aus Elementen von einer gewissen Gleichartigkeit besteht; aber trotzdem bleibt in jeder Partialmasse die Mannigfaltigkeit der Entstehungsbedingungen der Einzelfälle so gross, dass wir sie nicht mit Gewinn auf ein generisches Geschehen zurückführen könnten. So mögen in gewissen Schichten der Bevölkerung 40, in anderen nur 20 Procent der Geborenen im ersten Lebensjahre sterben; aber das Zustandekommen des einen wie des anderen Procentsatzes ist für uns eine rein empirische Thatsache, wenn wir auch im Allgemeinen wohl erkennen können, warum in der einen Gruppe die Sterblichkeit grösser ist, als in der anderen. Diese letztere Erkenntniss wäre übrigens schon als ein Resultat der statistischen Untersuchung anzusehen, da sie ohne exacte numerische Begründung nur als vage Vermuthung auftreten könnte.

5. Die selbständigen Ergebnisse der Statistik bestehen vorzugsweise darin, dass sie die angenäherte Constanz gewisser numerischer Verhältnisse der Massenerscheinungen feststellt. Dadurch entsteht der Schein, als wenn das menschliche Thun und Leiden Zahlengesetzen von mechanisch-naturwissenschaftlichem Charakter unterworfen sei. Handelt es sich um generische Massenerscheinungen, deren Einzelprocesse wir also nach ihrem allgemeinen Typus genügend übersehen können, so fallen uns solche Regelmässigkeiten gar nicht auf; es ist z. B. selbstverständlich, dass, wenn nicht ein ungewöhnlicher Aufschwung der Geschäfte oder anderseits eine

Krisis eintritt, in einem Jahre ungefähr ebenso viel von einer bestimmten Waare auf den Markt kommt, als in den nächstvorhergehenden oder nächstfolgenden, da die Zahl der Fabriken oder Arbeiter, welche diese Waare produciren, sich in normalen Zeiten nicht plötzlich ändern wird. Erscheint uns aber die Masse als ein zufälliges Aggregat von Einzelfällen mit sehr verschiedenen Verursachungen, so werden uns alle numerischen Regelmässigkeiten in derselben in hohem Grade auffallen.

Ist man nun wirklich berechtigt, die Regelmässigkeit der menschlichen Massenerscheinungen als Gesetze im naturwissenschaftlichen Sinne aufzufassen?

Ein Gesetz im naturwissenschaftlichen Sinne ist eine Abstraction aus einem gleichartigen Geschehen. Das Gesetzmässige des Geschehens muss allen beobachteten Einzelvorgänge gemeinsam sein, und wir müssen zu dem Inductionsschluss berechtigt sein, dass es überhaupt in allen Vorgängen dieser Art in gleicher Weise hervortreten wird. Die Wissenschaft fordert aber weiter, dass wir uns diesen generisch aufgefassten Process möglichst verständlich und begreiflich machen, und das geschieht, indem wir versuchen, denselben in einfachere Vorgänge zu zerlegen, bis wir endlich zu Elementaranschauungen gelangen, über die wir schlechthin nicht mehr hinaus können. Für die Naturwissenschaft ist dieser höchste und einfachste Typus eines Gesetzes durch die allgemeinen Differenzialgleichungen der Dynamik gegeben. Ein Naturgesetz in seiner höchsten Ausbildung gibt daher nur die allgemeine Formel für die Bewegung eines unendlich kleinen Elementes der Materie in einer unendlich kleinen Zeit. Aber auch die integrale, der wissenschaftlichen Beobachtung zugängliche Erscheinung (die als Massenerscheinung aufgefasst werden kann) wird vermöge der begrifflichen Einheit des Elementarprocesses durch eine Formel dargestellt, die ebenfalls als Gesetz betrachtet werden darf, da sie einfach die logische Folge aus dem Elementargesetz als dem Grunde bildet und das letztere wieder aus ihr abgeleitet werden kann. Insofern kann man auch sagen, dass die Gesammterscheinung durch diese Integralformel beherrscht werde.

So wird beispielsweise das Gravitationsgesetz durch eine Differenzialformel ausgedrückt, welche allgemein für jeden Zeitmoment die Bewegung eines Planeten bestimmt; die Integration dieser Formel aber gibt das Kepler'sche „Gesetz“ der elliptischen Bewegung des Planeten.

6. Das Element der menschlichen Massenerscheinungen ist nun eben der Mensch. So oft man also sich berechtigt glaubt, zu behaupten, dass alle Menschen oder alle Menschen einer gewissen Kategorie unter bestimmten Umständen immer auf eine bestimmte Art handeln werden, stellt man in der That im naturwissenschaftlichen Sinne ein Gesetz für eine menschliche Elementarerscheinung auf. Aber sind wir erfahrungsmässig jemals wirklich berechtigt, mit derselben Bestimmtheit in dieser Weise das menschliche Handeln vorauszusagen, wie wir z. B. behaupten dürfen, dass so oft ein electrischer Strom ein Stück Eisen umkreist, das letztere magnetisch wird? Offenbar nicht, denn unser abstractes Schema des menschlichen Handelns ist nothwendig immer ein unvollständiges, indem nur die in der Regel überwiegenden Ursachen und Wirkungen ausgesondert sind. Der Inductionsschluss von den beobachteten Erscheinungen auf die nichtbeobachteten, der auf naturwissenschaftlichem Gebiete eine empirische Gewissheit erlangt, führt daher in dem unerschöpflichen Reichthum des Menschenlebens nur zu einem grösseren oder geringeren Grade von Wahrscheinlichkeit.[1] Auch die äusseren Umstände werden in der Wirklichkeit grössere Verschiedenheit darbieten, als es in der allgemeinen Formulirung des „Gesetzes“ vorgesehen ist. Und so kann die Masse der Erscheinungen doch erhebliche Abweichungen von der „gesetzlichen“ Schablone aufweisen.

Es findet also nur eine formale Analogie zwischen den Naturgesetzen und den generischen Processen in den menschlichen Massenerscheinungen statt. Die ersteren beruhen auf einem Inductionsschluss von praktisch absoluter Gültigkeit; die letzteren aber wiederholen sich, mögen wir ihre Bedingungen auch noch so speziell feststellen, immer nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit. Mit anderen Worten, wir können auf dem Gebiete des Menschenlebens keinen Complex von Bedingungen angeben, der nothwendig und

---

[1]) Allgemein könnte man mit Rümelin fragen: „Sollte das Ineinandergreifen aller psychischen Kräfte sich vielleicht immer und überall einer wissenschaftlichen Feststellung entziehen, sollten sich die psychischen Kräfte gerade darin von den physikalischen und physiologischen unterscheiden, dass diesen ein ewig unwandelbares Maass der Leistungsfähigkeit zukommt, jene aber bei aller Beharrlichkeit ihrer Grundform hinsichtlich ihres Stärkegrades einer allmählichen inneren Umbildung unterworfen sind?“

hinreichend wäre, um mit Sicherheit ein bestimmtes menschliches Handeln nach sich zu ziehen.

So scheint es auf den ersten Blick ein allgemein gültiges „Gesetz“, dass das flüssige Capital aus einem Lande mit niedrigem Zinsfuss überströmen werde nach einem Lande mit hohem Zinsfuss, dass also insbesondere z. B. die Bank von Frankreich, wenn sie ihren Baarvorrath nicht gefährden will, niemals auf längere Zeit einen erheblich niedrigeren Discontosatz bestehen lassen darf, als die Bank von England. Und doch finden wir in dem Zeitraum von October 1865 bis September 1866 in Paris als Disconto-Minimum 3 %, als Maximum 5 %, während in London in diesen elf Monaten das Minimum 6 %, das Maximum aber 10 % betrug, und zwar mit so scharfem Gegensatze, dass 1866 von Mai bis August das Londoner Maximum mit einem Discontofusse von 4 % und 3½ % in Paris zusammenfällt. Und trotzdem trat der erwartete Baarabfluss von Paris nach London nicht ein, vielmehr stand der Wechselcurs meistens so, dass Gold aus England nach Frankreich geschickt werden musste. Die damalige Handelslage beider Länder, die Krisis in England und der Einfluss der Peel'schen Bankakte machen bei genauerer Untersuchung jene merkwürdige Divergenz vollkommen begreiflich. Aber mit der Gesetzeskraft des obigen allgemeinen Satzes ist es schlecht bestellt, wenn die concreten Umstände mächtig genug sind, gerade das Gegentheil der erwarteten Erscheinung hervorzurufen. Man kann dann nur noch von einer Regel sprechen, die in unberechenbarer Weise eclatante Ausnahmen gestattet.

7. Es gibt aber auch in der Natur concrete Massenerscheinungen, nämlich solche, deren Elementarvorgänge nicht gleichartig sind oder nicht unter einem durch das Ganze herrschenden Gesetze stehen. In solchen Fällen wäre es wohl möglich, die Aussenseite der Erscheinung durch eine empirische Formel darzustellen, aber diese Formel würde nicht der Ausdruck eines Naturgesetzes sein, sondern nur dem Endresultat des Zusammentreffens vieler verschiedenartiger, einzeln nicht zu verfolgender Elementarprocesse entsprechen.

So könnte man z. B. die Oberfläche eines aufgeschütteten Sandhaufens durch eine empirische Formel wenigstens näherungsweise ausdrücken, aber Niemand würde dieselbe als das Gesetz betrachten, das die Gleichgewichtslage der einzelnen, verschieden geformten Sandkörner geregelt hätte. Jedes Korn ist vielmehr der Einwirkung

eines besonderen Complexes von Stössen und Reibungen ausgesetzt gewesen und, zwar streng naturgesetzlich, aber auf einem für uns unberechenbaren Wege in seine Ruhelage geführt worden. Wenn wir uns dagegen die Körner sämmtlich gleichartig und zwar unendlich klein und absolut glatt denken, so sind wir im Stande, die (hydrostatischen und hydrodynamischen) Gleichungen aufzustellen, die allgemein für jedes Element einer solchen Masse die Normen des Gleichgewichts und der Bewegung ausdrücken, und dann haben wir diese Erscheinungen unter ein einheitliches Naturgesetz gebracht.

Die concreten Massenerscheinungen des Menschenlebens sind nun offenbar analog jenen unauflöslichen Massenerscheinungen der Natur. Die Einzelvorgänge derselben sind so verschiedenartig, dass sich keine allgemeine Regel über die Verursachung und den Verlauf derselben abstrahiren lässt. Es lässt sich also gleichsam nur die Aussenseite der Massenerscheinung untersuchen und zahlenmässig feststellen. Aber was in Betreff des eben angeführten physikalischen Beispieles Niemandem einfallen würde, nehmen Manche hinsichtlich der statistischen Massenerscheinungen ohne Weiteres an, dass nämlich die empirische Formel für die Aussenseite einer Aufhäufung von Einzelfällen ein die Gesammterscheinung beherrschendes Gesetz darstelle.

Freilich wird man zu dieser Auffassung leicht verführt durch die numerischen Regelmässigkeiten der Massenerscheinungen. Die Beobachtung, dass von einer Million Geborener in einem gegebenen Lande 250,000 im ersten Lebensjahre sterben, gibt allerdings nur dem äusseren Umriss dieser Massenerscheinung; aber wenn dieses Verhältniss für eine ganze Reihe von Generationen näherungsweise constant bleibt, so gelangt man zur Abstraction einer numerischen Sterblichkeitsregel, die jedenfalls eine äussere Analogie mit einem Naturgesetz besitzt.

Indess pflegt man doch die Thatsache, dass die mittlere Jahrestemperatur eines Ortes z. B. ziemlich constant 9 Grad C. beträgt, nicht als ein Naturgesetz zu bezeichnen. Diese Mitteltemperatur ist nur die Folge sehr mannigfaltiger, im Einzelnen naturgesetzlich bestimmter meteorologischer Processe, die sich zwar von Jahr zu Jahr im Grossen und Ganzen in ähnlicher Weise wiederholen, aber doch auch zuweilen bedeutend divergirende Durchschnittsresultate ergeben. Der Schluss von dem Beobachteten auf das nicht Beob-

achtete ist also weit unsicherer, als in dem Falle eines wirklichen, isolirten Naturgesetzes.

Noch unsicherer ist nun aber dieser Schluss bei concreten Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft. Die allgemeinen Vorbedingungen der meteorologischen Processe bleiben jedenfalls in höherem Grade constant, als die verwickelten Ursachensysteme der menschlichen Erscheinungen. Unter den auf kürzere Zeitstrecken ziemlich unverändert bleibenden statistischen Verhältnisszahlen wüsste ich keine, von der es nicht wahrscheinlich wäre, dass sie mit der Veränderung und Entwicklung der allgemeinen Culturverhältnisse, mit den Fortschritten der Gesundheitspflege, des Wohlstandes u. s. w. im Laufe eines längeren Zeitraumes in positivem oder negativem Sinne langsam veränderlich sein werde. Die statistischen Zahlen folgen ja selbstverständlich der Entwicklung der menschlichen Zustände, die sie numerisch präcisiren sollen.

8. Die äussere Regelmässigkeit der concreten Massenerscheinungen könnte nur dann als Gesetz im naturwissenschaftlichen Sinne anerkannt werden, wenn sie unmittelbar das Zusammentreffen der Einzelfälle regelte. Die Elementarvorgänge besässen dann trotz der grossen Mannigfaltigkeit ihrer Verursachung nur scheinbar die Unabhängigkeit von einander, die sich äusserlich zeigt; in Wirklichkeit bestände eine innere Beziehung zwischen ihnen, die unmittelbar das Zustandekommen der beobachteten numerischen Regelmässigkeit in der Massenerscheinung bedingen müsste. Dann hätten wir eine allgemeine, durch alle Einzelfälle gehenden Norm des Geschehens, die wohl den Anspruch auf den Titel Gesetz besässe, auch wenn sie langsamen Veränderungen in der Zeit unterworfen wäre.

Sind aber Gesetze dieser Art in den menschlichen Massenerscheinungen, zumal den aus bewusstem Handeln der Individuen hervorgehenden, wirklich nachweisbar?

Von einer vollständigen Unabhängigkeit der im Schoosse der Gesellschaft vorkommenden Einzel-Vorgänge und -Handlungen kann allerdings keine Rede sein. Insbesondere besteht ein gewisser „socialethischer“ Zusammenhang zwischen dem Ganzen der Gesellschaft und ihren Gliedern; die Gesinnungen, welche den Handlungen der Individuen zu Grunde liegen, wirken auch wieder in ihrer Gesammtheit als Gemeingeist, Zeitgeist, sittliche Stimmung der Gesellschaft zurück auf den Einzelnen. Aber wenn auch der Complex

von Motiven, aus dem die Handlung eines Individuums hervorgeht, durch psychologische, sittliche oder unsittliche Einflüsse aus seiner näheren oder entfernteren Umgebung mit bestimmt wird, so folgt doch daraus keineswegs, dass diese Einflüsse nach einer in ihnen selbst liegenden Norm zusammenwirken, um ein bestimmtes numerisches Ergebniss in der Totalerscheinung zu Stande zu bringen. Eine Vorstellung dieser Art, und zwar in überwiegend mechanischer Auffassung, liegt offenbar dem Standpunkte Quételets zu Grunde. Man denke nur an seine oft wiederholte Phrase von dem Budget des Schaffots und der Gefängnisse. Buckle hat diese Anschauung in dilettantenhafter Weise bis zu den äussersten Grenzen erweitert, während in Deutschland A. Wagner Anfangs zwar Quételet sehr nahe stand, später aber von dessen Einseitigkeit zurückgekommen ist. An die Stelle der mechanischen Auffassung der moralstatistischen Erscheinungen, die namentlich schon von Drobisch mit Erfolg bekämpft worden war,[1]) machte Al. v. Oettingen die „socialethische“ geltend, die ohne Zweifel berechtigt ist, wenn sie in den oben angedeuteten Grenzen bleibt. Wollte man aber so weit gehen, dass man den Zahlenverhältnissen in der sittlichen Welt eine geheimnissvolle, wirksame Rolle beilegte, anstatt sie lediglich als Resultate der Wirklichkeit anzusehen, so nähme man statt des unbegreiflichen mechanischen ein ebenso unbegreifliches mystisches Gesetz an.

9. Vom Standpunkt des Mechanismus aber wie der Mystik müsste man zur Erklärung der statistischen Gesetzmässigkeiten voraussetzen, dass neben den bewussten Motiven der menschlichen Individuen noch ein Unbewusstes laufe, das als durch das Ganze herrschende Macht bestimmte numerische Verhältnisse in der Totalerscheinung erstrebe und erzwinge.

Nun stehen allerdings auf dem Gebiete des vollbewussten, selbstbestimmten Handelns sehr häufig die Einzelvorgänge einer Massenerscheinung trotz ihrer Mannigfaltigkeit in einem Zusammenhange, der auf ein constantes numerisches Endresultat hinwirkt und dasselbe näherungsweise auch wirklich hervorruft. Solche Erschei-

---

[1]) Auch Knapp und Schmoller sind den statistischen Naturgesetzen entgegen getreten. Vgl. u. a. auch Windelband, die Lehren vom Zufalle, S. 26 ff. und die sehr scharfe Kritik Quételets von Rehnisch in der Zeitschrift für Philos. und ph. Krit. B. 68 u. 69.

nungen gehören namentlich im volkswirthschaftlichen Leben zu den trivialen Dingen. Angenommen ein in einem gewissen Lande in grösserem Umfange betriebener Industriezweig bedürfe zweier Arten von Rohstoffen, die aus verschiedenen Ländern eingeführt werden müssen, und zwar soll das fertige Product von dem Stoffe A immer doppelt so viel enthalten, als von dem Stoffe B. Dann ist einleuchtend, dass dieses Verhältniss 2:1 die relativ unabhängigen, weil von vielen Importeuren selbständig betriebenen einzelnen Einfuhren beider Rohstoffe in der Weise beherrscht, dass es bei jeder Operation im Auge behalten werden muss. Wäre in den ersten Monaten des Jahres die Zufuhr des Stoffes B ungewöhnlich stark gewesen, so würde die Rücksicht auf die massgebende Proportion entweder die Importeure dieses Stoffes zur Mässigung ihrer Unternehmungen oder, bei einem grossen Aufschwunge der Geschäfte, die Importeure des Stoffes A zu einer entsprechenden Mehreinfuhr veranlassen. Und so würde Jahr aus Jahr ein immer nahezu das richtige Verhältniss der Totaleinfuhr beider Stoffe zu Tage treten.

Auf dieses schematische Beispiel sind die numerischen „Gesetze“ zurückzuführen, welche die Befahrung eines Weltmarktes regeln. Es gibt eben viele Waarengruppen, die in quantitativ bestimmten Verhältnissen zusammengehören, und diese Verhältnisse müssen durch das Zusammenwirken zahlreicher, äusserlich von einander unabhängiger Einzelsendungen in der Gesammtzufuhr einer gewissen Zeitstrecke zum Ausdruck gebracht werden.

Freilich gehören diese und ähnliche Massenerscheinungen, in denen die Herrschaft eines Zahlenverhältnisses unmittelbar erkennbar ist, zu den generischen, da die wesentlichen Bedingungen ihrer Elementarvorgänge in abstracto übersehen werden können. Auch hat der numerische Nachweis der Constanz solcher Verhältnisse im Allgemeinen kein wissenschaftliches Interesse, es sei denn, dass man einzelne Beispiele zu methodologischen Zwecken behandelt.

Denkt man sich aber statt des bewussten „zielstrebigen“ Zusammenhanges der Einzelerscheinungen einen unbewussten, so hätte man eben das kabbalistische Phänomen eines herrschenden Zahlengesetzes in einer concreten Massenerscheinung.

10. Diese Betrachtungen führen uns zu einer zweiten Eintheilung der Massenerscheinungen: die einen, die man als unverbundene bezeichnen kann, sind solche, deren Einzelfälle von einander unabhängig sind oder doch nicht in einem solchen Zusammen-

hange stehen, der auf die Erzeugung eines bestimmten numerischen Verhältnisses in der Gesammterscheinung hinwirkt; die andern aber sind dann als verbundene zu bezeichnen und dadurch charakterisirt, dass ihre Einzelfälle in einem Zusammenhange mit einander stehen, der ein bestimmtes numerisches Verhältniss in der Totalerscheinung bedingt. Insbesondere müsste also, wenn durch eine Anzahl von Einzelfällen Abweichungen von diesem Verhältnisse zu entstehen drohen, durch andere Fälle Ausgleichung oder Ersatz eintreten.

Die unverbundenen Massenerscheinungen können sowohl zu den generischen wie zu den concreten gehören; verbundene dagegen kommen unzweifelhaft nur unter den generischen vor; dass sie auch unter den concreten Massenerscheinungen zu finden seien, wird man jedenfalls in Abrede stellen dürfen, bis der positive Beweis dafür geliefert ist. Jedoch ist von der Theorie zu fordern, dass sie allgemeine Kriterien aufstelle, um Massenerscheinungen dieser problematischen Art zu erkennen, wenn sie vorkommen sollten. Diesen Kriterien würde man natürlich auch schon dann einen Gewinn verdanken, wenn sich mit ihrer Hülfe zeigen liesse, dass alle genauer untersuchten Massenerscheinungen zu jener Kategorie nicht gehören. Weiter unten wird man, wie ich glaube, diese Aufgabe wenigstens theilweise gelöst finden.

II. Die Theorie der Massenerscheinungen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

11. Die Theorie der Massenerscheinungen hat zunächst eine formale Aufgabe zu erfüllen: sie soll die richtige Abgrenzung der Massen lehren und namentlich die Methode festellen, wie eine Masse, deren Elemente zu verschiedenen Zeiten eine Reihe von Veränderungen erfahren, in ihrem gesammten Zustandswechsel correct verfolgt werden kann. Diese formale, besonders für die Bevölkerungsstatistik wichtige Theorie ist in neuerer Zeit, nachdem Knapp's Arbeiten den Anstoss gegeben, zur Genüge ausgebildet worden.[1])

[1]) Ueber das Nähere und die Litteratur s. meine „Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik". Strassb. 1875.

Aber die Theorie soll auch die Möglichkeit gewähren, wenigstens in gewissem Sinne eine vermehrte Einsicht in das Materielle der Massenerscheinungen zu gewinnen. Bei dieser Untersuchung, mit der wir uns im Folgenden näher beschäftigen wollen, wird die Thatsache ausgenutzt, dass wir eben mit Massen, mit grossen Zahlen zu thun haben, und sie beruht daher wesentlich auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Einige allgemeine Bemerkungen über die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die objective Aussenwelt mögen vorausgeschickt werden.

Als mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bezeichnet man bekanntlich das Verhältniss der diesem Ereignisse günstigen, gleich möglichen Fälle zu der gesammten Zahl der gleich möglichen Fälle überhaupt. Als Zweig der reinen Mathematik braucht die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Bedeutung oder Bedeutungslosigkeit dieses Verhältnisses für die objective Welt keine Rücksicht zu nehmen; sie stellt dasselbe als Definition auf, rechnet auf dieser Grundlage weiter und gelangt zu interessanten analytischen Entwicklungen, die mathematischen Selbstzweck besitzen.

Nun folgt schon aus der Voraussetzung gleich möglicher Fälle, dass diese Rechnung nur auf dem Gebiete der subjectiven Wahrscheinlichkeit eine apriori'sche Anwendbarkeit besitzt.

Wenn wir in Folge unseres ungenügenden Wissens keinen Grund absehen, wesshalb wir einen Fall für leichter möglich halten sollen, als einen anderen, so nehmen wir für unser subjectives Ermessen alle Fälle als gleich möglich an, und Jedermann der nicht mehr über die objective Entstehungsart der Ereignisse weiss, wird diese gleiche Möglichkeit ebenfalls zugeben. So dient die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Beantwortung von Fragen über Combinationen von Chancen, die als gleich angenommen werden und ihre unmittelbare praktische Verwendung würde sie daher lediglich in der Regelung von Glückspielen und Wetten finden, die denn ja auch den ersten Anstoss zu ihrer Ausbildung gegeben haben. Denn die Gerechtigkeit und Billigkeit der Bedingungen eines Würfelspiels z. B. lässt sich auf Grundlage der gleichmässigen Unwissenheit der Betheiligten über die complicirten Bewegungen des Würfels vollkommen befriedigend herstellen.

12. Aber mit der so dargestellten subjectiven Wahrscheinlich-

keit eines Ereignisses darf die objective, physische Möglichkeit desselben nicht verwechselt oder vermengt werden, — ein Satz, den besonders Cournot nachdrücklich hervorgehoben hat.

Die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Beurtheilung der objectiven Möglichkeit eines Ereignisses ergibt sich keineswegs aus ihr selbst oder aus ihrem Grundprincip, sondern lediglich aus der Erfahrung. Denn es gibt in der Wirklichkeit keine gleich möglichen Fälle, jedes Ereigniss ist ein absolut individueller Process, das Endglied einer Causalitätskette, die ins Unendliche zurückläuft. Auch gibt es streng genommen keine gegeneinander absolut indifferente Ereignisse, wie es doch die Grundvorstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ebenfalls verlangt.

Wenn die Kugel bereits in der Roulette rollt, ist für die Spieler die subjective Wahrscheinlichkeit des Herauskommens irgend einer Nummer noch eben so gross wie die jeder anderen, und die weiteren Einsätze regeln sich mit Recht noch nach dieser Voraussetzung. Und doch steht der Verlauf des mechanischen Processes und somit auch die Endlage der Kugel dann schon naturgesetzlich fest und von einer gleichen Möglichkeit aller Endergebnisse kann objectiv gar keine Rede mehr sein.

Nun aber vergleiche man die Resultate, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung, indem sie von der Vorstellung gleich möglicher Fälle ausgeht, für eine Massenerscheinung ableitet, mit der beobachteten Wirklichkeit: dann wird man finden, dass sehr viele Massenerscheinungen sich so verhalten, als wenn es gleich mögliche, von einander völlig unabhängige Einzelereignisse gäbe. So gewinnt also die Wahrscheinlichkeit auf Grund der Erfahrung eine objective Bedeutung und dadurch eine ausgedehnte Anwendbarkeit. Wir können namentlich die beobachteten Massenerscheinungen mit den nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartenden Ergebnissen vergleichen: findet ein Widerspruch statt, so sind wir wahrscheinlich von falschen Voraussetzungen ausgegangen und es gelingt dann oft, durch genauere Untersuchungen unser Wissen zu berichtigen.

13. Wie aber erklärt sich die Uebereinstimmung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Wirklichkeit, wenn es in der Wirklichkeit weder gleich mögliche noch absolut von einander unabhängige Ereignisse gibt?

Man kann sich hier weder auf den Bernoulli'schen

Satz, noch auf Poisson's Formulirung des Gesetzes der grossen Zahlen berufen.

Nach diesen Sätzen wird, wenn ein Ereigniss eine bestimmte mathematische Wahrscheinlichkeit besitzt, bei einer grossen Zahl von Beobachtungen sehr wahrscheinlich die Zahl des Vorkommens des Ereignisses dividirt durch die Beobachtungs- oder Versuchszahl nahezu jener Wahrscheinlichkeit gleichkommen. In dem Bedingungssatz wird aber die objective Bedeutung der auf der Vorstellung gleich möglicher Fälle beruhenden mathematischen Wahrscheinlichkeit schon vorausgesetzt. Es handelt sich für uns vielmehr um die Umkehrung dieses Satzes. Wenn bei einer gegebenen Zahl z von Beobachtungen oder Versuchen ein gewisses Ereigniss e mal eintritt, darf man dann den Bruch $\frac{e}{z}$ als Näherungswerth einer mathematischen Wahrscheinlichkeit behandeln, die zugleich die physische Möglichkeit des Ereignisses ausdrückt? Darf man mit diesem Werthe weiter rechnen, wie mit einer mathematischen Wahrscheinlichkeit, und entsprechen die weiteren Rechnungsresultate ebenfalls der Wirklichkeit? Zur Beantwortung dieser Frage kann auch der Satz über die Wahrscheinlichkeit a posteriori nichts helfen, da dieser nur eine vorausgesetzte Wahrscheinlichkeit a priori näherungsweise bestimmt; jene Frage kann vielmehr in jedem Falle nur erfahrungsmässig entschieden werden. Vor allem ist zu untersuchen, ob sich der Werth von $\frac{e}{z}$ mit zunehmendem z in bestimmter Richtung dauernd verändert. Das Ereigniss kann ja nach einer uns unbekannten Entwicklung nach und nach relativ häufiger oder seltener eintreten. In solchen Fällen kann jener Quotient offenbar nicht die Bedeutung einer mathematischen Wahrscheinlichkeit besitzen.

Nun zeigt aber die Erfahrung, dass bei vielen Massenerscheinungen der Natur und des Menschenlebens jener, die relative Häufigkeit des betrachteten Ereignisses darstellende Quotient $\frac{e}{z}$ in vielen neben einander oder nach einander angestellten Beobachtungs- oder Versuchsreihen nahezu constant bleibt, besonders wenn diese Reihen sehr gross sind.

Diese Thatsache deutet zunächst nur darauf hin, dass der Quotient $\frac{e}{z}$ ein zweckmässiges empirisches Kriterium der physischen Möglichkeit des Ereignisses sei. Auch erscheint ja von vornherein trotz seines vagen Charakters der Satz plausibel, dass ein Ereigniss um so leichter möglich ist, je häufiger

es in einer gegebenen grossen Zahl von Versuchen vorkommt.

Die ungefähre Constanz eines solchen Möglichkeitscoëfficienten, wie wir jenen Ausdruck der Kürze wegen nennen wollen, ist also nur ein Symptom, welches auf das ungefähre Gleichbleiben der allgemeinen Entstehungsbedingungen des Ereignisses hindeutet.

14. Aber selbst wenn der Möglichkeitscoëfficient in mehreren Reihen eine angenäherte Constanz aufweist, darf man ihm doch noch nicht ohne weiteres den präcisen Charakter einer näherungsweise ausgedrückten mathematischen Wahrscheinlichkeit beilegen. Dazu bedarf es noch des Nachweises, dass die empirischen Werthe des Möglichkeitscoëfficienten bei zunehmender Beobachtungszahl in solcher Weise gegen einen festen Grenzwerth convergiren, wie es die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie verlangt. Wie dieser Nachweis indirekt geliefert werden kann, wird unten näher erörtert. Er lässt sich in der That in manchen Fällen mit genügender Sicherheit führen, und wenige Beispiele dieser Art reichen schon aus, um der mathematischen Wahrscheinlichkeit eine objective Bedeutung als Mass der realen Möglichkeit zu sichern. Man ist dann berechtigt, auf Grund der Wahrscheinlichkeitstheorie für die Massenerscheinungen ein ideales Schema aufzustellen und sie zu classificiren, je nachdem sie diesem Schema näherungsweise entsprechen oder in dem einen oder dem andern Sinne wesentlich von demselben abweichen.

Was bedeutet aber der Satz, dass eine Massenerscheinung auf das Schema der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgeführt sei? Die Möglichkeitscoëfficienten der einzelnen Versuchsweisen haben in diesem Falle einen festen Grenzwerth $\frac{E}{Z}$, und das Ereigniss tritt in solcher Frequenz auf, wie sie nach der Theorie zu erwarten wäre, wenn bei jedem Versuche einer von Z gleich möglichen und von einander unabhängigen Umständen die Entscheidung gäbe, und zwar E von diesen Umständen das Ereigniss hervorriefen, die übrigen aber dasselbe verhinderten.

Man kann natürlich die Zahl der günstigen und ungünstigen Umstände ausserordentlich, selbst unendlich gross annehmen, ohne dass dadurch das Verhältniss $\frac{E}{Z}$ verändert wird.

Nun sind in der wirklichen Welt sowohl für das Eintreten als für die Verhinderung eines Ereignisses unzählig viele Umstände entscheidend, aber diese Umstände sind selbstverständlich weder

gleich möglich noch absolut unabhängig von einander. Wären sie in strengem Sinne gleich möglich, so wäre ja das wirkliche Auftreten eines dieser Umstände ein absoluter Zufall, der in der objectiven Welt undenkbar ist.

Folglich ist das Zusammenfallen des Grenzwerthes des Möglichkeitscoëfficienten mit einer mathematischen Wahrscheinlichkeit, soweit es näherungsweise durch die Erfahrung constatirt wird, nur durch die Annahme zu erklären, dass die unberechenbare Mannigfaltigkeit der Umstände, welche das Ereigniss hervorrufen oder verhindern eine genügende Analogie des absoluten Zufallsspiels mit E günstigen gegen $Z—E$ ungünstige Chancen darbiete.

15. Kehren wir nun zur Betrachtung der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft zurück, und zwar insbesondere derjenigen, deren Einzelvorgänge auf bewusstem Handeln beruhen. Gehören dieselben in die Classe der „concreten“, so ist damit schon gesagt, dass die Einzelfälle hinsichtlich ihrer Entstehungsbedingungen und ihrer Motivirung sehr verschiedenartig wird. Gehören die betreffenden Massenerscheinungen ausserdem zu den „unverbundenen“ — und die Verbundenheit ist ja unter den concreten Massenerscheinungen ganz unerwiesen — so sind die Einzelfälle wenigstens in Bezug auf das Zustandekommen des empirischen Möglichkeitscoëfficienten von einander unabhängig.

Verhalten sich die einzelnen Möglichkeitscoëfficienten in einer Anzahl von Versuchsreihen [1]) nachweislich wie Näherungswerthe einer constanten mathematischen Wahrscheinlichkeit, so ist dadurch dargethan, dass die allgemeinen Bedingungen der Möglichkeit des Ereignisses trotz der Schwankungen der einzelnen Quotienten in den verschiedenen Beobachtungsreihen unverändert geblieben sind.

Was aber ist mit diesem Nachweise gewonnen?

„Allgemeine Bedingungen der Möglichkeit“ eines Ereignisses das nach der Voraussetzung unter höchst mannigfaltigen, im Einzelnen unbekannten, subjectiven und objectiven Einflüssen zu Stande kommt — das ist ein von vornherein sehr unklarer und problematischer Begriff. Durch den eben erwähnten Nachweis aber wird gezeigt, dass er wirklich objective Bedeutung besitzen und auf einen bestimmten mathematischen Ausdruck gebracht werden kann, der

---

[1]) Unter „Versuch“ ist jeder mitgezählte Fall zu verstehen, in dem das besondere Ereigniss eingetreten oder nicht eingetreten ist.

seinerseits auf der Vorstellung eines Zufallsspiels mit einer bestimmten Zahl günstiger und ungünstiger Chancen beruht.

Es gibt also dann doch etwas allgemeines und bleibendes in den concreten Massenerscheinungen, deren Einzelfälle für unsere Betrachtung nur den Endausgang gemeinschaftlich haben. Aber es handelt sich in diesen Fällen nur um allgemeine und bleibende Möglichkeiten, die für uns nicht unmittelbar fassbar sind.

16. Durch dieses Gleichbleiben der Möglichkeitsbedingungen einer Massenerscheinung wird aber, auch wenn die Einzelfälle aus bewussten (aber sehr mannigfaltigen) Motiven entstehen, die individuelle Willensfreiheit, die doch nicht als bestimmungslose Willkür aufzufassen ist, durchaus nicht in Frage gestellt, Jeder Einzelfall bleibt in seiner besonderen Causalitätskette; er wird nur registrirt als Wirkung eines der unzähligen möglichen Ursachensysteme, die das Ereigniss zu Stande bringen können.

Die Beziehungen der Einzelfälle unter sich können nähere und entferntere sein, aber ausdrücklich zugestanden ist ja, was im Interesse der Willensfreiheit auch zu fordern wäre, dass sie im Bezug auf das Zustandekommen des Möglichkeitscoëfficienten von einander unabhängig seien. Dies heisst, dass eine etwaige starke Abweichung von dem normalen Möglichkeitscoëfficienten, die sich in einem Theile der Versuche herausstellte, in keiner Weise eine entsprechende Ausgleichung in einem anderen Theile bedingen darf, ebensowenig, wie beim Roulettespiel eine Reihenfolge von zwanzigmal „Roth" irgend welchen Einfluss auf die folgenden Spielresultate haben kann und darf. Niemand ist also z. B. genöthigt sich aufzuhängen, um das Budget der Selbstmorde vollständig zu machen.

Ein sogenannter gesetzlicher Einfluss des nur als *Resultat* und nicht als herrschende Formel auftretenden Möglichkeitscoëfficienten ist ja ausdrücklich ausgeschlossen, da wir nur unverbundene concrete Massenerscheinungen vor uns haben; ganze Versuchsreihen können sehr weit von der Wahrscheinlichkeit abweichen, wie beim Roulettespiel zwanzigmal dieselbe Farbe nach einander folgen kann; es ist dann eben etwas geschehen, was a priori sehr unwahrscheinlich, aber doch nicht unmöglich war.

Aber trotz der mehr oder minder grossen Abweichungen der Einzelreihen lehrt uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung in den hier angenommenen Fällen, dass die objective Möglichkeit des Ereignisses in allen Reihen dieselbe war; sie lehrt uns verstehen, wie die grösste

Mannigfaltigkeit des einzelnen Geschehens mit geringer Veränderlichkeit der numerischen Verhältnisse der Massenerscheinungen verbunden sein kann.

17. Dass es wirklich nur auf die den Zufall nachahmende grosse Mannigfaltigkeit der physischen oder geistigen Verursachung unter gewissen allgemeinen Bedingungen ankommt, dürfte aus folgendem Beispiel klar werden.

Man zähle nach, wie oft in einem Bande von Göthe's Werken der Buchstabe *e* vorkommt und wie viele Buchstaben der Band überhaupt enthält. Das Verhältniss der ersteren Zahl zu der letzeren stellt dann einen empirischen Ausdruck der Möglichkeit des Vorkommens von *e* in der deutschen Sprache dar. In jedem anderen Bande von Göthe wird man sehr wahrscheinlich einen nahezu gleichen Näherungswerth dieses Möglichkeitscoëfficienten finden;[1]) und wenn man den Satz eines Bandes aufbräche und aus dem fortwährend blindlings aufgewühlten Haufen der Lettern so oftmal eine derselben herausnähme, als der Band Buchstaben zählte (mit jedesmaligem Zurückwerfen des gezogenen Buchstabens) so würden diese Ziehungen wiederum nahezu denselben Möglichkeitscoëfficienten des *e* ergeben.

Aber hat diese, durch den phonetischen Charakter der deutschen Sprache bedingte Stabilität des Möglichkeitscoëfficienten von *e* oder irgend einem anderen Buchstaben die Freiheit von Göthe's Gedanken und Stil beschränkt? Gewiss nicht; er hat deutsche Worte in grosser Zahl und Mannigfaltigkeit aneinander gereiht ohne sich um die relative Häufigkeit des *e* in seinen Worten zu kümmern; welche Ideen ihn bei diesen Wortverbindungen leiteten, kommt gar nicht in Betracht, die blosse Mannigfaltigkeit und grosse Zahl der Worte genügt um die Frequenzverhältnisse der einzelnen Buchstaben nach den allgemeinen Bedingungen ihrer Möglichkeit, wie sie durch die Besonderheit der Sprache gegeben sind, hervortreten zu lassen.

Der „phonetische Charakter“ einer Sprache ist ebensowenig etwas scharf Fassbares, wie „die allgemeinen Bedingungen der Mög-

---

[1]) Man kann dies schon aus dem interessanten Experimente schliessen, welches Hagen schon in der ersten Auflage seiner „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (Berlin 1837) in Betreff des Vorkommens des e in der Vorrede von Eytelweins Mechanik angestellt hat.

lichkeit“ des Einzelereignisses einer concreten Massenerscheinung; aber der eine wie der andere Begriff besitzt gleichwohl seine bestimmte objective Bedeutung, welche in vielen Fällen in der mathematischen Wahrscheinlichkeit einen adäquaten Ausdruck findet.

Handelt es sich um *generische* Massenerscheinungen, so vermögen wir die wesentlichen Enstehungsbedingungen der *Einzelereignisse* als gleichartig zu erkennen, und die Regelmässigkeiten der Gesammterscheinung werden uns im Allgemeinen ebenso begreiflich sein wie die etwaigen starken Schwankungen. Wir finden es ganz natürlich, dass auf den Kopf der Bevölkerung eines Landes, das weder durch eine Krisis gestört, noch in einem ungewöhnlichen wirthschaftlichen Aufschwung begriffen ist, von Jahr zu Jahr eine ungefähr gleiche Getreideconsumtion kommt; und ebenso natürlich ist es, dass dieses Land, wenn es nur in normalen Jahren seinen Getreidebedarf selbst zu produciren vermag, je nach den Ernteergebnissen in den verschiedenen Jahren einen sehr stark veränderlichen Bruchtheil seiner Consumtion aus dem Auslande einführt.

Der Uebergang von den generischen zu den concreten Massenerscheinungen ist übrigens ein allmähliger; wir sind häufig noch im Stande, Bedingungen zu erkennen, welche von grossem Einfluss auf das Zustandekommen des Ereignisses sind, aber nicht *allgemein* mit zu Grunde liegen; je zahlreicher solche Bedingungen von beschränkter Tragweite auftreten, um so deutlicher erhält die Massenerscheinung den Charakter einer concreten, bei der eben ein gar nicht zu entwirrender Bedingungscomplex der Totalerscheinung zu Grunde liegt.

17. Also weder die generischen noch die unverbundenen concreten Massenerscheinungen stellen uns durch die ungefähre Constanz ihrer numerischen Verhältnisse vor eine Unbegreiflichkeit oder eine mechanische Gesetzmässigkeit. Denn diese Regelmässigkeiten entstehen in den unverbundenen Massenerscheinungen, ohne dass unter den Einzelfällen eine Beziehung bestände, welche auf die *Compensation der Abweichungen* hinwirkt; in den concreten entstehen sie dadurch, dass die Einzelfälle jeder Versuchsreihe einen wenig veränderlichen allgemeinen Bedingungscomplex gewissermassen nach allen Richtungen hin ausprobiren und daher einen nahezu gleichbleibenden äusseren Umriss desselben ergeben; in den generischen unverbundenen Massenerscheinungen aber ergibt sich die äussere Regelmässigkeit einfach dadurch, dass jeder beobachtete

Einzelfall auf dasselbe Resultat hinzielt und es mehr oder weniger genau verwirklicht; bei den verbundenen generischen Massenerscheinungen endlich waltet in den Einzelhandlungen eine für uns erkennbare und erklärliche Rücksicht auf die Erzielung eines gewissen Verhältnisses in der Totalerscheinung ob.

Unbegreiflich bliebe uns also, wie schon früher bemerkt wurde, nur die verbundene concrete Massenerscheinung — wenn sie wirklich vorkommen sollte. Denn in dieser bestände zwischen den Einzelfällen eine geheimnissvolle, unserer Erkenntniss nicht zugängliche Compensationstendenz.

Es ist also wünschenswerth zu zeigen, dass die uns bisher bekannten Regelmässigkeiten concreter Massenerscheinungen in diese problematische Kategorie nicht gehören.

Das Kriterium zur Unterscheidung dieser Art von Massenerscheinungen kann nur gesucht werden in dem Grade der Divergenz oder der „Dispersion" der Ergebnisse mehrerer Versuchsreihen.

Wenn das Vorkommen eines Ereignisses in einer grösseren Zahl von Versuchsreihen sich so gestaltet, als ob es von einem reinen Glücksspiel mit E Chancen gegen $Z-E$ abhinge, so liegt uns ohne Zweifel eine unverbundene Massenerscheinung vor. Denn im reinen Zufallsspiel, das wenigstens näherungsweise durch Roulette, Würfel u. s. w. verwirklicht werden kann, findet ein compensatorischer Zusammenhang der Einzelfälle nicht statt.

Ist die Dispersion der Reihenergebnisse noch grösser, als sie unter der Voraussetzung eines Zufallsspiels mit constanter Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zu erwarten wäre, so tritt die „Unverbundenheit" der Massenerscheinung noch entschiedener zu Tage. Dieser Fall ist zu vergleichen mit dem zufälligen Ziehen von schwarzen und weissen Kugeln aus verschiedenen Urnen, die von Reihe zu Reihe zufällig gewählt werden und die nicht sämmtlich schwarze und weisse Kugeln in gleichem Verhältnisse enthalten, sondern ungenau und zwar mit zufälligen Fehlern gefüllt worden sind.

Zeigte sich dagegen in einer grossen Zahl von Versuchsreihen eine entschieden geringere Dispersion der einzelnen Resultate, als dem Schema eines Glücksspiels entspricht, so würde es mit der steigernden Zahl der Versuchsreihen immer wahrscheinlicher, dass eine Beziehung zwischen den Einzelfällen besteht, welche auf das Zustandekommen eines festen Endverhältnisses direkt hinwirkt.

Wenn die mathematische Theorie zeigt, dass bei einem reinen

Glücksspiel die Ueberschreitung einer gewissen Abweichung von dem wahrscheinlichsten Resultate [1]) die Wahrscheinlichkeit $1/2$ hat, so ist mit grosser Wahrscheinlichkeit zu erwarten, dass bei einem wirklichen Glücksspiel, das sich dem reinen Zufallsspiel genügend annähert, in 1000 Versuchen jene Abweichungsgrenze nahezu 500 Mal nicht erreicht und auch nahezu 500 Mal überschreiten werde. Sollte sich nun aber herausstellen, dass die sämmtlichen 1000 Versuchsresultate innerhalb der bezeichneten Grenze blieben, so wäre es fast gewiss, dass die Versuche nicht den Bedingungen eines Glücksspiels mit festen Chancen entsprachen, dass irgend eine unbekannte Ursache thätig gewesen, um grössere Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Endresultate zu verhindern.

Es wäre z. B. anzunehmen, dass dem Ziehenden die Kugeln der einen oder anderen Art in der Urne mit Rücksicht auf das Endresultat irgendwie in die Hände gespielt worden seien.

18. Die Wichtigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Erkenntniss der inneren Constitution der Massenerscheinungen erscheint hiernach in einem neuen Licht.

Wie aber erfährt man aus der Theorie, ob eine concrete Massenerscheinung dem Schema des Zufallsspiels mit constanten (oder auch zufällig schwankenden) Chancen entspricht, oder ob die Divergenz der Einzelresultate so gering ist, dass man eine innere Verbundenheit derselben annehmen muss?

Diese Frage lässt sich nur mathematisch beantworten, und ich kann daher hier nur eine ungefähre Vorstellung von ihrer Lösung geben. Näheres findet man in meiner Abhandlung über das Geschlechtsverhältniss der Geborenen.[2])

Wir betrachten nur solche aus Massenbeobachtungen abgeleitete Zahlenverhältnisse, die von vorn herein als empirische Näherungswerthe einer mathematischen Wahrscheinlichkeit oder doch als Functionen von solchen Wahrscheinlichkeiten angesehen werden

---

[1]) Beim Herausgreifen z. B. von je 1000 Kugeln aus einer Urne, die unbegrenzt viele schwarze und weisse Kugeln in gleicher Anzahl enthielte, wäre das wahrscheinlichste Resultat 500 schwarze und 500 weisse Kugeln. Es bestände ungefähr die Wahrscheinlichkeit $1/2$ dafür, dass eine der beiden Farben mit wenigstens 20 Kugeln mehr aufträte, als die andere, also in dem Verhältniss von wenigstens 510 gegen 490.

[2]) Hildebrand und Conrad, Jahrbücher, XXVII., S. 209.

können. Die Zahl der Gestorbenen eines Jahres dividirt durch die Zahl der Lebenden am Anfang des Jahres ist zwar ein Bruch, aber keine Wahrscheinlichkeit, da ausser jenen Lebenden auch noch die im Laufe des Jahres geborenen Kinder dem Sterben ausgesetzt werden und einen gewissen Tribut von Sterbefällen zu der Gesammtzahl beitragen. Die Zahl der Knabengeburten dividirt durch die Gesammtzahl der Geburten eines Jahres dagegen kann als eine empirische Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden, denn jede Geburt ist eine Erprobung, ob ein Knabe oder ein Mädchen geboren wird, und aus einer grossen Anzahl solcher Proben ergibt sich also ein empirischer Möglichkeitscoëfficient v für die Knabengeburt. Das Verhältniss der Knabengeburten zu den Mädchengeburten aber ist keine Wahrscheinlichkeit, wohl aber eine Function der eben angeführten Wahrscheinlichkeit v; denn man hat die Beziehung: $p = \frac{v}{1-v}$

Angenommen nun, man habe in n Reihen von je z Versuchen die empirischen Wahrscheinlichkeiten oder Möglichkeitscoëfficienten eines Ereignisses bestimmt, die mit μ_1, μ_2, $\ldots \mu_n$ bezeichnet werden mögen. Sind dieselben wirklich als Näherungswerthe einer bestimmten, der objectiven Möglichkeit des Ereignisses entsprechenden mathematischen Wahrscheinlichkeit anzusehen, so ist der wahrscheinlichste Werth dieser unbekannten objectiven Wahrscheinlichkeit W gleich dem arithmetischen Mittel m aus den Grössen μ_1, μ_2 u. s. w., und ferner müssen sich diese letzteren Werthe, wenn ihre Anzahl einigermassen gross ist, zu beiden Seiten des Mittelwerthes (den wir an die Stelle des wahren Werthes W setzen dürfen) in einer der Theorie entsprechenden Weise gruppiren.

Selbst bei mässiger Grösse von n dürfte man wenigstens erwarten, dass die theoretisch bestimmte „wahrscheinliche“ Abweichung (nämlich diejenige, die ebenso oft, sei es nach der positiven oder nach der negativen Seite, nicht erreicht, wie überschritten wird) durch die wirkliche Vertheilung der Werthe μ näherungsweise bestätigt werde, dass also nahezu die eine Hälfte der μ innerhalb, die andere ausserhalb der theoretisch festgestellten Grenzen falle.

19. Der theoretische Ausdruck der „wahrscheinlichen“ Abweichung ist näherungsweise $\pm \frac{\varrho \sqrt{2m(1-m)}}{\sqrt{z}}$, wenn ϱ die Constante

0,4769 darstellt, und m und z die oben angegebene Bedeutung haben.[1])

Die wahrscheinliche Abweichung ist also umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Beobachtungszahl einer Reihe.

Je grösser diese Beobachtungszahl z, desto kleiner wird die wahrscheinliche Abweichung r, desto grösser also die Zuverlässigkeit oder **Präcision** dieser Näherungsbestimmung von W.

Die sämmtlichen μ haben, wegen des gleichbleibenden z, trotz ihrer verschiedenen Distanzen von m dieselbe „Präcision", und zwar ist der Ausdruck dieser für die Theorie wichtigen Charakteristik gleich $\frac{\rho}{r}$ oder $\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2m(1-m)}}$

Bezeichnen wir diese Präcision der Einzelbestimmung der μ (die nur bekannte Grössen enthält) mit h, ferner allgemein die Abweichung oder den Fehler des einzelnen μ mit x, und das Product hx mit u, so stellt die Theorie eine besondere Function von u auf, mit deren Hülfe man sofort die Wahrscheinlichkeit bestimmen kann, dass der Fehler zwischen $+x$ und $-x$ liege. Die Werthe dieser Function, die wir mit F_u bezeichnen wollen, sind in einer nach dem Argument u von 0 an fortschreitenden Tabelle zusammengestellt[2]) und der zu jedem u gehörende Tabellenwerth stellt die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen $+\frac{u}{h}$ und $-\frac{u}{h}$ dar.

So erhält man die theoretische Vertheilung der ungenauen Einzelwerthe für beliebige Strecken zu beiden Seiten (symmetrisch) des wahren Werthes, und bei hinreichend grosser Zahl der Beobachtungsreihen muss die Vertheilung der μ um den Mittelwerth m, der dem wahren Werthe möglichst nahe kommt, wenigstens näherungsweise der Theorie entsprechen, wenn wirklich die beobachtete Massenerscheinung auf das Schema eines Zufallsspiels mit der Wahrscheinlichkeit W für das Eintreten der Ereignisse zurückführbar ist.

Es könnte aber auch vorkommen, dass die beobachtete Vertheilung der μ sich noch zur Genüge nach der Function F_u dar-

---

[1]) Wenn z eine grosse Zahl ist, kann man ohne erheblichen Fehler statt m das aus einer einzigen Versuchsreihe sich ergebende μ nehmen.

[2]) Ein Auszug aus dieser Tabelle ist im Anhang beigefügt.

stellen liesse, aber nur, wenn man statt des oben angeführten h irgend einen kleineren oder grösseren Werth annähme. Im ersteren Falle wäre die Präcision der Einzelbestimmung kleiner, als sie theoretisch unter der Voraussetzung sein müsste, dass die Bedingungen der Abweichungen vom wahren Werthe denjenigen analog seien, welche beim Ziehen von Kugeln aus einer Urne mit schwarzen und weissen in gleichbleibendem Verhältniss vorliegen. Ausser dieser letzteren Fehlerursache, die ich die „combinatorische“ nennen will,[1]) wird also in solchen Fällen noch eine weitere vorhanden sein, wie z. B. die oben erwähnte Verschiedenheit der Urnen von Reihe zu Reihe mit zufälligen Fehlern des Füllungsverhältnisses. Diese Fehlerquelle mag die „physische“ genannt werden.

Wäre dagegen die Annahme eines grösseren h erforderlich, so müsste durch eine besondere Ursache die Präcision der Einzelbestimmungen der μ über diejenige hinaus gesteigert sein, welche nach Analogie der Ergebnisse eines normalen Zufallsspiels zu erwarten wäre. Diese Ursache würde nicht absolut sicher wirken, es blieben noch zufällige Abweichungen von dem wahren Werthe übrig, und eben wegen dieser Zufälligkeit der Fehler behielte die Funktion F_u ihre Bedeutung.

Also wäre eine allgemeine Regel zur Erkennung der „verbundenen“ concreten Massenerscheinungen: man untersuche, ob die wirkliche Vertheilung der beobachteten μ auf eine erheblich grössere Präcision hinweist, als die durch den Ausdruck $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2\,m\,(1-m)}}$ gegebene.

In der Praxis würde es schon genügen zu constatiren, dass die durch Abzählung gefundene wahrscheinliche Abweichung bedeutend kleiner wäre, als die theoretisch bestimmte.

20. Diese Untersuchungen setzen jedoch nicht nur viele Beobachtungen, sondern viele Beobachtungsreihen voraus. Es ist nun jedenfalls wünschenswerth, ein Kriterium zu besitzen, welches auch bei einer kleineren Anzahl von Reihen den Charakter der Massenerscheinung einigermassen andeutet. Das folgende dürfte in vielen Fällen genügend sein.

Die Vertheilung ungenauer Einzelbestimmungen um einen festen,

---

[1]) In der oben angeführten Abhandlung über das Geschlechtsverhältniss habe ich diese Fehlerursache die „statistische“ genannt.

wahren Werth erfolgt immer nach der Funktion F_{u}, wenn die Entstehung der Fehler eine **zufällige** ist, wozu namentlich auch erfordert wird, dass statt jeder positiv wirkenden Fehlerursache ebenso leicht eine gleiche, aber negativ wirkende auftreten könne und dass die Gesammtzahl der Fehlerursachen eine sehr grosse sei. Die Natur der bestimmten Grösse und die Art der Messung ist vollkommen gleichgültig.

Der wahrscheinlichste Werth der gemessenen Grösse ist (bei gleichen Genauigkeitsbedingungen in allen Einzelbestimmungen) das arithmetische Mittel der Einzelwerthe, und der wahrscheinliche Fehler (in der oben angegebenen Bedeutung) kann direct durch die Abweichungen der Einzelwerthe vom Mittel ausgedrückt werden. Bezeichnet man nämlich die Summe der Quadrate dieser Abweichungen, also in unserem Beispiele $(\mu_1 - m)^2 + (\mu_2 - m)^2 + \cdots (\mu_n - m)^2$ mit $[\delta^2]$, so ist die „wahrscheinliche Abweichung" r der Einzelbestimmung am wahrscheinlichsten $= \pm \varrho \sqrt{\frac{2[\delta^2]}{n-1}}$ (wo ϱ wieder $= 0{,}4769$) und demnach die Präcision $h = \frac{\varrho}{r} = \sqrt{\frac{n-1}{2[\delta^2]}}$

Der wahrscheinliche Fehler dieses h wieder ist nahezu gleich $\frac{\varrho h}{\sqrt{n}}$, also umgekehrt der Quadratwurzel aus der Zahl der Versuchsreihen proportional.

Somit haben wir zwei von einander unabhängige Arten der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers und der Präcision. Die zuletzt betrachtete, welche die „physikalische" heissen mag, gilt allgemein für alle Grössen, deren Einzelbestimmungen oder Messungen **zufälligen** Störungen ausgesetzt sind, also auch für die aus verbundenen Massenerscheinungen abgeleiteten Verhältnisszahlen, wenn nur die Bedingung der Zufälligkeit der Störungen erfüllt ist. Die andere Art der Ableitung der Präcision dagegen, die wir die „combinatorische" nennen wollen, passt nur dann, wenn die Beobachtungen jeder Reihe der empirischen Ermittlung einer constanten Wahrscheinlichkeit durch z Versuche eines reinen Zufallsspiels entsprechen.

Durch Vergleichung der nach beiden Arten berechneten Präcision erhalten wir also entweder:

a) $\sqrt{\frac{z}{2\,m\,(1-m)}} = \sqrt{\frac{n-1}{2\,[\delta^2]}}$, oder

b) $\sqrt{\frac{z}{2\,m\,(1-m)}} > \sqrt{\frac{n-1}{2\,[\delta^2]}}$, oder

c) $\sqrt{\frac{z}{2\,m\,(1-m)}} < \sqrt{\frac{n-1}{2\,[\delta^2]}}$

Die Kriterien *a)* oder *b)* charakterisiren die unverbundenen concreten Massenerscheinungen, und zwar ist die Gleichung *a)* von besonderem Inseresse, weil sie eine Beziehung zwischen der Zahl z der Versuche in jeder Reihe und den Fehlern der Resultate der n Versuchsreihen darstellt.

Die Ungleichheit *c)* dagegen würde auf eine verbundene concrete Massenerscheinung hindeuten, indem nur durch eine besondere innere Verbindung der Einzelereignisse zu erklären wäre, dass die nach der physikalischen Methode, also unmittelbar aus den beobachteten Abweichungen vom Mittel, bestimmte Präcision wesentlich grösser sein könnte, als die nach der combinatorischen Methode berechnete.

Statt der Präcisionen kann man natürlich auch die nach beiden Methoden berechneten wahrscheinlichen Fehler zur Aufstellung der gesuchten Kriterien verwenden.

21. Kann die untersuchte statistische Verhältnisszahl nicht unmittelbar als eine mathematische Wahrscheinlichkeit, jedoch wohl als Function einer solchen aufgefasst werden, so wird der wahrscheinliche Fehler der Einzelbestimmung näherungsweise ausgedrückt durch das Product des ersten Differentialquotienten der Function nach jener Wahrscheinlichkeit als Veränderlichen und des wahrscheinlichen Fehlers der Einzelbestimmung dieser Wahrscheinlichkeit, ausgedrückt nach der combinatorischen Methode; andererseits aber kann man die unmittelbar gefundenen Verhältnisszahlen wieder nach der physikalischen Methode, d. h. nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeln und somit einen zweiten Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler der Einzelbestimmung gewinnen; durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke oder der aus ihnen durch Division in ϱ abgeleiteten Präcisionen gelangt man wieder, wie oben, zur Charakterisirung der untersuchten Massenerscheinung.

In vielen Fällen ist es der Anschaulichkeit wegen zweckmässig,

die von der Statistik gelieferten Möglichkeitscoëfficienten als empirische Ausdrücke einer Summe zusammengesetzter Wahrscheinlichkeiten, oder, wie wir der Kürze wegen sagen wollen, als empirische „Totalwahrscheinlichkeiten“ aufzufassen. Es entspricht der Wirklichkeit besser, wenn wir z. B. annehmen, dass die mathematische Sterbenswahrscheinlichkeit der Neugeborenen im ersten Lebensjahre für verschiedene Bevölkerungsgruppen verschieden sei und zwar gleich c_1, c_2, $c_3 \ldots c_n$; wenn nun ausserdem die Wahrscheinlichkeiten, dass ein auf's Gerathewohl bezeichnetes neugeborenes Kind einer dieser Gruppen angehöre, ausgedrückt werden durch γ_1, γ_2, $\gamma_3 \ldots \gamma_n$, so ist die totale Sterbenswahrscheinlichkeit $R = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + c_3 \gamma_3 + \ldots c_n \gamma_n$

Dieselbe bleibt constant, wenn die einzelnen c und γ keine Aenderung erleiden. Dass die aus vielen Versuchsreihen abgeleiteten Möglichkeitscoëfficienten die Annahme einer constanten Totalwahrscheinlichkeit rechtfertige, ist ganz in derselben Weise erfahrungsmässig nachzuweisen, wie wenn man eine einfache Wahrscheinlichkeit voraussetzt, und auch die oben aufgestellten Kriterien zur Classificirung der Massenerscheinungen bleiben bei beiden Anschauungen umgeändert.

22. Diese Unterscheidung verdient namentlich Beobachtung, wenn ein Theil der γ absolut gleich 0 zu setzen ist, d. h. wenn Versuche oder beobachtete Fälle mit in Rechnung gezogen werden, in denen das besondere Ereigniss unmöglich eintreten kann. Die Zahl G der Geburten eines Jahres dividirt durch die Gesammtzahl L der Einwohner eines Landes zu Anfang des Jahres kann z. B. als Näherungswerth einer zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit dieser Art betrachtet werden. Greifen wir blindlings ein Individuum aus der Bevölkerung heraus, so bestehe die Wahrscheinlichkeit c_1 [1]) dafür, dass dasselbe männlichen Geschlechts sei, in welchem Falle natürlich die Wahrscheinlichkeit des Gebärens γ_1 gleich 0 ist. Ferner sei die Wahrscheinlichkeit c_2 vorhanden, dass man unter den weib-

---

[1]) Die Zahl der männlichen Individuen, die im Anfang des Jahres im Lande vorhanden war, dividirt durch die Gesammtzahl der Bevölkerung ist nur ein einzelner Näherungswerth von c_1; diese Grösse selbst ist die durch die allgemeinen Verhältnisse bedingte abstracte Wahrscheinlichkeit, dem männlichen Geschlechte anzugehören, die constant bleiben kann, auch wenn das empirische Verhältniss der beiden Geschlechter von Jahr zu Jahr gewissen Schwankungen unterliegt.

lichen Individuen auf ein solches stosse, das durch zu geringes oder zu hohes Alter absolut nicht gebärfähig ist, so dass das entsprechende γ_2 wieder $= 0$ sein muss. Die Wahrscheinlichkeit aber, eine gebärfähige weibliche Person zu treffen, sei c_3, und γ_3 sei die mittlere Wahrscheinlichkeit, dass eine solche im Laufe eines Jahres wirklich gebären wird — wobei wir der Einfachheit wegen von einer weiteren Zerlegung der Gebärfähigen in Gruppen mit verschiedener Wahrscheinlichkeit des Gebärens (namentlich in Verheirathete und Ledige) absehen.

Ist nun F die Zahl der Gebärfähigen, so ist $\frac{F}{L}$ ein Näherungswerth für c_3 und $\frac{G}{F}$ ein solcher für γ_3, mithin stellt das Verhältniss $\frac{G}{L}$ einen Näherungswerth der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit $c_3\,\gamma_3$ dar. Dieses Product ist jedenfalls weniger interessant, als jeder der beiden Factore für sich, die freilich auch weit schwieriger festzustellen sind.

Bildet man nun die empirischen Quotienten $\frac{G}{L}$ für eine Reihe auf einander folgender Jahre, so wird eine Anwendung der Formeln *a), b), c)* (§ 20) im Allgemeinen keinen Zweck haben, selbst wenn die einzelnen Quotienten sich als zufällige Modificationen eines festen Werthes verhalten und demnach die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gestatten. Es würden nämlich die einzelnen Werthe des Quotienten $\frac{F}{L}$ von einem Jahre zum anderen sich nicht so ändern, wie es der Fall sein müsste, wenn sie durch ein Glücksspiel in je L Versuchen erlangten Näherungswerthe der objectiven Wahrscheinlichkeit c_3 wären. Denn jene Werthe sind nicht genügend unabhängig von einander, da in zwei auf einander folgenden Jahren die Hauptmasse der Lebenden sowohl wie der Gebärfähigen aus denselben Personen besteht. Auch die Quotienten $\frac{G}{F}$ stehen in auf einander folgenden Jahren nicht in der gegenseitigen Unabhängigkeit, wie sie den empirischen Einzelbestimmungen einer constanten Wahrscheinlichkeit γ_3 zukommen müsste.

Aber auch abgesehen von solchen speciellen Hindernissen sind Möglichkeitscoëfficienten, die in ihrem Nenner gewissermassen einen unnöthigen Ballast mit sich führen, zur theoretischen Untersuchung wenig geeignet.

23. Man kann diese Schwierigkeit umgehen, indem man sich auf relative Wahrscheinlichkeiten beschränkt, um den Grad der

Regelmässigkeiten gewisser Massenerscheinungen nach den oben angegebenen Kriterien zu untersuchen.

Einen empirischen Näherungswerth der absoluten Heirathswahrscheinlichkeit während eines Jahres in einem gegebenen Lande könnte man nur mit der mehr oder weniger unsicheren Zahl der „Heirathsfähigen" als Nenner ausdrücken. Sehr zuverlässig dagegen lässt sich durch den Quotienten aus der Zahl der heirathenden Junggesellen und der Gesammtzahl der Heirathen empirisch die relative Wahrscheinlichkeit darstellen, dass eher ein Junggeselle als ein Wittwer heirathet. Diese empirischen Werthe können sich gründen auf eine durch die socialen, Alters- und sonstigen Verhältnisse der Bevölkerung bedingte constante Wahrscheinlichkeit dafür, dass die heirathenden Männer Junggesellen seien; ob und wie weit dies wirklich der Fall sei, lässt sich nun nach den Formeln des § 20 untersuchen.

Man muss sich übrigens darauf gefasst machen, dass in vielen ja vielleicht in den meisten Fällen auch solche Verhältnisszahlen, die als Näherungswerthe von absoluten oder relativen Wahrscheinlichkeiten aufgefasst werden können, bei genauerer Prüfung auf diesen Charakter keinen Anspruch behalten. Wenn z. B. in einer längeren Reihe von Jahren ein solches Verhältniss auch nur geringe Schwankungen zeigt, so ist man doch nicht wohl berechtigt, diese Zahlen auf eine constante, durch die allgemeinen Umstände und Möglichkeitsbedingungen erzeugte mathematische Wahrscheinlichkeit zurückzuführen, wenn die grösseren Abweichungen vom Mittelwerth der beobachteten Zahlen entschieden häufiger vorkommen als die Kleineren.

Wir haben dann nur ein rein empirisches Gleichbleiben der beobachteten Verhältnisszahlen, das mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung keinen bestimmten Zusammenhang besitzt. Insbesondere ist es dann auch ein rein empirischer Schluss, dass die Beobachtungen des nächsten Jahres wieder ein ungefähr gleiches Verhältniss ergeben werden; denn wir sind nicht berechtigt, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung Fehlergrenzen für das Ergebniss der nächstjährigen Beobachtungen anzugeben, wenn in der vorliegenden längeren Reihe von Jahren die Abweichungen der Einzelresultate vom Mittel sich so ganz und gar abweichend von der Wahrscheinlichkeitstheorie vertheilen.

24. Das eben Gesagte gilt mit noch grösserer Bestimmtheit, wenn die beobachteten Verhältnisszahlen in einer Reihe von Jahren

sich zwar nur wenig, aber mit anhaltendem Vorherrschen der einen oder der anderen Richtung ändern. Wenn z. B. die beobachteten Verhältnisszahlen zwanzig Jahre nach einander immer zunehmen und dann vielleicht ebenso viele Jahre hindurch fortwährend abnehmen, so kann von zufälligen Störungen eines constanten Grundwerthes gar keine Rede mehr sein. Daher ist die Methode der kleinsten Quadrate von vorn herein auf solche Zahlenreihen nicht mehr anwendbar.

Man kann nun freilich auch bei zeitweilig andauernder bestimmter Richtung der Veränderungen formell in jedem Jahre eine mathematische Wahrscheinlichkeit als Charakteristik der physischen Möglichkeit der untersuchten Ereignisses voraussetzen; aber diese Wahrscheinlichkeit muss dann von Jahr zu Jahr veränderlich gedacht werden, und zwar nicht durch zufällige Störungen, sondern nach besonderen, uns unbekannten Bedingungen. Man kann nun zur Erforschung dieser Bedingungen und der Grösse ihres Einflusses auf die Aenderung der Wahrscheinlichkeit übergehen; aber die uns hier zunächst interessirende Frage, die Anwendbarkeit der Formeln des § 20, kann für Massenerscheinungen dieser Art nicht weiter verfolgt werden. Nur wenn es gestattet ist, aus einer langen Reihe von Jahresresultaten, die im ganzen eine vorherrschende Zunahme oder Abnahme der beobachteten Verhältnisszahlen zeigen, einzelne noch hinlänglich grosse Stücke auszusondern, in denen die Veränderlichkeit der zu Grnnde liegenden Wahrscheinlichkeit gegenüber den zufälligen Schwankungen der Beobachtungswerthe als unbedeutend angesehen werden darf — nur dann hat es einen Zweck, jene Formeln auf solche Strecken zur Charakteristik der vorliegenden Massenerscheinung zu benützen.

Es wäre von geringem Nutzen, wenn man über die Veränderlichkeit der vorausgesetzten mathematischen Wahrscheinlichkeit eine Hypothese aufstellen wollte, indem man sie algebraisch durch eine Curve oder auch durch eine geneigte oder gebrochene Linie darzustellen suchte. Es wäre dann nach der Methode der kleinsten Quadrate leicht, die Linie so zu bestimmen, dass die beobachteten Zahlen so wenig wie möglich von ihr abweichen, aber die Annahme dieser Norm für die Veränderung der objectiven Wahrscheinlichkeit bliebe trotzdem eine willkürliche. Diese Veränderung erfolgt überhaupt nicht nach einem mathematisch-mechanischen „Gesetze“; sie ist lediglich symptomatisch für die Flüssigkeit und Veränderlichkeit

der äusserst zahlreichen und mannigfaltigen Bedingungen, die wir im Einzelnen nicht verfolgen können, deren Gesammtwirkung wir aber in der Massenerscheinung gleichsam „aus der Vogelschau“ überblicken.

25. So werden wir zu einer weiteren wichtigen Eintheilung der zur Darstellung von Massenerscheinungen dienenden statistischen Reihen geführt. Die eine, und allem Anscheine nach weitaus zahlreichste Classe derselben umfasst die symptomatischen Reihen, die einen mehr oder weniger veränderlichen menschlich-gesellschaftlichen Zustand durch gewisse numerische Symptome charakterisiren. Deutet eine solche Reihe auf eine anhaltende Entwicklung der untersuchten Momente zum Besseren oder zum Schlechteren hin, so besitzt sie einen historisch-individuellen Charakter und man kann sie als eine evolutorische Reihe bezeichnen. Bewegen sich die Zahlen der Reihe in längeren oder kürzeren Zeiträumen ohne durchschlagende Tendenz und auch nicht der Theorie der zufälligen Abweichungen gemäss, auf und nieder, so mag eine solche Reihe eine oscillatorische heissen. Dieselbe wird zu einer periodischen, wenn wenigstens die Richtung der Bewegung sich mit einer erkennbaren Regelmässigkeit in der Zeit, z. B. nach den Jahreszeiten, ändert.

Dieser Classe der symptomatischen Reihen steht nun gegenüber die Classe der typischen Reihen. Alle Glieder einer solchen Reihe sind mehr oder weniger genaue Darstellungen eines constanten numerischen Typus, der in seinem Hervortreten zufälligen Störungen ausgesetzt ist.

Wegen dieser Zufälligkeit der Abweichungen kann auf alle typischen Zahlenbestimmungen die Methode der kleinsten Quadrate angewandt werden, d. h. man darf als wahrscheinlichsten Werth der zu Grunde liegenden festen Grösse das arithmetische Mittel aus den Einzelbestimmungen annehmen (wenigstens bei gleichem Gewicht derselben) und man kann nach jener Methode die wahrscheinliche Abweichung und die Präcision der Einzelbestimmungen sowohl wie des Mittels berechnen.

Die Glieder einer typischen Reihe sind entweder absolute oder Wahrscheinlichkeitsgrössen. Im ersten Falle betrachtet man sie einfach als Ergebnisse irgend eines, zufälligen Fehlern unterworfenen, Messungs- oder Bestimmungsverfahren, ohne auf ihre besondere Natur Rücksicht zu nehmen. Solche Grössen lassen nur die Methode der kleinsten Quadrate zu.

Im anderen Falle aber können die Reihenglieder als Wahrscheinlichkeiten oder als Functionen von Wahrscheinlichkeiten aufgefasst werden und diese besondere Kategorie von typischen Grössen lässt sich wieder nach den Formeln des § 20 in drei Classen zerlegen, nämlich in:

1) typische Wahrscheinlichkeitsgrössen mit normaler Dispersion, entsprechend der Formel a) und den Bedingungen eines reinen Glücksspiels mit schwarzen und weissen Kugeln in constant bleibendem Verhältniss;

2) typische Wahrscheinlichkeitsgrössen mit übernormaler Dispersion, entsprechend der Formel b) und einem Glüchsspiel mit schwarzen und weissen Kugeln in Verhältnissen, die reihenweise zufällig um einen Mittelwerth herum variiren;

3) typische Wahrscheinlichkeitsgrössen mit unternormaler Dispersion, entsprechend der Formel c) und einem unregelmässigen Spiel, bei dem durch absichtliche Einwirkung die Ergebnisse der einzelnen Versuchsreihen dem Mittelwerthe näher gerückt werden, als es bei einem Zufallsspiel mit constanten Chancen zu erwarten wäre. Typische Grössen dieser Art gehören in Wirklichkeit nicht mehr zu den Wahrscheinlichkeitsgrössen, sondern haben nur die Form derselben.

Nachdem wir nun die Theorie und die Classificirung der Massenerscheinungen im Allgemeinen betrachtet haben, gehen wir zu einigen specielleren Erörterungen über.

III. Absolute typische Grössen.

26. Hat man eine grössere Anzahl von Bestimmungen gleichartiger Grössen, so sind diese Einzelwerthe als typisch, d. h. als Näherungswerthe eines festen Grössentypus anzusehen, wenn sie sich nach dem durch die Function F_u gegebenen Wahrscheinlichkeitsgesetze des Zufalls um ihren Mittelwerth vertheilen. Der letztere stellt in diesem Falle die wahrscheinlichste Grösse des festen Grundwerthes dar und er besitzt daher als „typisches Mittel“ eine weit grössere sachliche Bedeutung als das arithmetische Mittel oder der Durchschnitt aus Grössen, welchen die obige Beziehung zu einem festen Werthe fehlt.

Indess finden auch in den Fällen der letzteren Art, also wenn

man mit gleichnamigen Grössen von ganz beliebiger quantitativer Verschiedenheit zu thun hat, gewisse formale Beziehungen statt, die nicht ohne Interesse sind. Es ist hier besonders auf die Untersuchungen Fechner's über die Potenzmittelwerthe hinzuweisen, die auch die Beachtung des Statistikers verdienen[1]).

Das arithmetische Mittel aus einer Anzahl beliebiger Grössen ist nämlich nur ein besonderer Fall eines Potenzmittels und durch die folgenden beiden Eigenschaften charakterisirt: 1) die Summe der positiven Abweichungen vom Mittel ist, absolut genommen, gleich der Summe der negativen Abweichungen, und 2) die Summe der Quadrate der Abweichungen ist ein Minimum.

Unter den übrigen Potenzmitteln aber gibt es namentlich noch eines von praktischem Interesse, das Fechner den „Centralwerth" nennt. Man erhält denselben einfach, indem man die gegebenen Einzelwerthe nach ihrer zunehmenden Grösse ordnet und durch Abzählen den Werth bestimmt, der in der Mitte steht.

Dieser „Centralwerth", der übrigens auch früher schon beachtet worden ist, hat folgende Eigenschaften: 1) die Anzahl der von ihm abweichenden Grössen ist auf der positiven Seite eben so gross wie auf der negativen — dies folgt eben aus seiner Definition; 2) die Summe der Abweichungen auf der positiven und negativen Seite, diese sämmtlich absolut, d. h. positiv genommen, ist ein Minimum — was Fechner elementar bewiesen hat.

Der Centralwerth ist also nach seinen Eigenschaften nicht weniger bemerkenswerth als das arithmetische Mittel, hat aber vor diesem den Vorzug, mit weit grösserer Leichtigkeit bestimmt werden zu können. Wenn man eine Masse nicht typischer Grössen durch einen Mittelwerth einigermassen charakterisiren will — eine Charakteristik, die doch immer etwas vages behält — so dürfte der Centralwerth ganz dieselben Dienste thun, wie das meist nur sehr mühsam zu berechnende arithmetische Mittel.

27. So ist z. B. die mittlere Lebensdauer einer abgestorbenen Generation ein rein arithmetischer Begriff ohne alle typische Bedeutung; nimmt man statt derselben den Centralwerth der bei der Generation beobachteten (abgeschlossenen) Lebenslängen, also diejenige,

---

[1]) Fechner, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme. (XI. B. der Abh. der math. phys. Classe der k. Sächs. Ges. der Wissensch. Nro. 1. Leipz. 1874.)

welche in der Reihe der nach der Grösse geordneten Lebenslängen in der Mitte steht, so erhält man die in der That ja neben der mittleren Lebensdauer längst in Aufnahme gekommene „wahrscheinliche" Lebensdauer, die für die allgemeine Charakterisirung der Vitalität und Mortalität einer Generation ebenso viel oder ebenso wenig leistet, wie jene arithmetiche Mittelzahl.

Will man eine Ziffer haben, welche im Grossen und Ganzen die Altersverhältnisse der gleichzeitigen Bevölkerung eines Landes charakterisirt und durch ihre Ab- und Zunahme Aenderungen in diesen Verhältnissen andeutet, so ist das „Centralalter" d. h. der Centralwerth der beobachteten gleichzeitigen Altersgrössen für diese Rolle ebenso geeignet, wie das nur durch eine lange Rechnung festzustellende „Durchschnittsalter der Lebenden". Ueberdies hat das „Centralalter" die Bedeutung, dass das Alter eines „zufällig" aus der Bevölkerung herausgegriffenen Individuum's jenen Werth ebenso wahrscheinlich nicht erreichen, wie überschreiten wird. Man kann ihn daher auch als das „wahrscheinliche Alter" der gleichzeitigen Lebenden bezeichnen.

So findet man z. B. in Preussen dieses Centralalter

am 1. Decbr. 1871:	männl. G.	22.38 Jahr;	weibl. G.	23.27 Jahr,
am 3. Decbr. 1867:	„	22.67 „	„	23.47 „
in Frankreich:				
1861:	„	28.70 „	„	28.97 „
1856:	„	28.63 „	„	28.77 „

Die preussischen Zahlen für 1867 sind etwas zu gross, weil sie durch Interpolation in eine 10jährige Altersstrecke gewonnen sind, in der alle einzelnen Jahrgänge gleich stark besetzt angenommen wurden. Für 1871 war wegen des vollständigeren Zählungsmaterials nur Interpolation in eine einjährige Strecke nöthig. Für Frankreich waren fünfjährige Altersclassen der Bevölkerung gegeben. Man sieht also aus diesen Beispielen, dass das Centralalter in jedem der beiden Länder für jedes Geschlecht ziemlich constant bleibt, dass es beim weiblichen Geschlecht etwas grösser zu sein scheint, als bei dem männlichen und dass es in Frankreich erheblich grösser ist als in Preussen. Specielleres würde man auch aus dem Durchschnittsalter der Lebenden nicht erfahren.

28. Es sei hier auch noch ein anderes Mittel erwähnt, von dem Fechner ebenfalls eine interessante, hier nicht weiter zu berührende mathematische Eigenschaft nachgewissen hat, nämlich der

sogenannte „dichteste Werth“, derjenige, um den sich die Einzelwerthe am dichtesten schaaren. Eine solche Anhäufung um einen besonderen Werth bildet gewissermassen den Uebergang zu den typischen Grössen und eben deswegen hat der „dichteste Werth“ [1] sachlich eine grössere Bedeutung, als arithmetisches Mittel und Centralwerth. Theilt man die sämmtlichen Einzelwerthe nach ihrer Grösse in Classen mit gleichen Differenzen, und zwar so, dass das Dichtigkeitsmittel in die Mitte eines Intervalls fällt, so ist a posteriori zu schliessen, dass die Einzelwerthe der untersuchten Grösse wahrscheinlicher in diese letztere Abtheilung fallen, als in irgend eine andere, und dass das Dichtigkeitsmittel überhaupt den relativ wahrscheinlichsten Werth darstellt.

Die mittlere Lebensdauer einer abgestorbenen Generation und das Durchschnittsalter einer gleichzeitigen Bevölkerung besitzen gerade deswegen eine so geringe sachliche Bedeutung, weil sich in der Nähe dieser Werthe die Einzelfälle nicht zusammendrängen, und dasselbe gilt in Bezug auf das Centralalter einer abgestorbenen Generation oder einer Bevölkerung.

Um so wichtiger aber sind diejenigen Fälle, in denen die drei hier aufgeführten Mittel genau oder nahezu zusammentreffen.

Arithmetisches Mittel und Centralwerth fallen zusammen, wenn die Gruppirung der nach ihrer Grösse geordneten Einzelwerthe zu beiden Seiten eines Mittelwerthes symmetrisch erscheint. Dieser Mittelwerth ist dann eben zu gleicher Zeit arithmetisches Mittel und Centralwerth. Aber es ist durchaus nicht nöthig, dass auch das Dichtigkeitsmittel in denselben Punkt fällt. Denkt man sich die Dichtigkeit der Vertheilung graphisch dargestellt, so kann z. B. die Curve gegen die Abscissenaxe, nach unten hin, convex sein, so dass der Mittel- und Centralwerth mit dem Punkte der geringsten Dichtigkeit zusammentreffen.

Ist die Curve dagegen nach unten concav [2]) und zugleich symmetrisch gegen eine mittlere Ordinate, so vereinigen sich die drei Mittel in einem Punkte, und das arithmetische Mittel wird möglicher Weise zu einem typisehen, mit dem es jedenfalls nun die wichtige Eigenschaft theilt, dass verhältnissmässig die meisten Fälle sich in seiner Nähe zusammendrängen.

---

[1]) Bequemer wäre vielleicht die Bezeichnung „Dichtigkeitsmittel“.

[2]) Wenigstens in der Nähe der grössten Ordinate.

29. Wie aber soll in einer unverbundenen Masse eine solche symmetrische Gruppirung der Einzelwerthe nach ihrer Grösse möglich sein? Im Allgemeinen wäre dies ohne eine direct wirksame innere Beziehung zwischen den Einzelgliedern nicht denkbar. Der Zweig der Dichtigkeitscurve auf der einen Seite des Mittels müsste massgebend sein für die Vertheilung der Dichtigkeit auf der anderen Seite, und es wäre also in solchen Fällen ein durch die ganze Masse herrschendes eigentliches Gesetz anzunehmen, das auf bestimmte numerische Ergebnisse hinwirkte — eine unbegreifliche, kabbalistische Erscheinung.

Jene Symmetrie würde voraussetzen, dass die Einflüsse, welche den Untersuchungsgegenstand über den Mittelwerth hinaus vergrössern, ganz gleichartig wirken, wie diejenigen, welche ihn unter dem Mittel zurückhalten.

Bei unverbundenen Massen ist dies einzig in der Weise annehmbar, dass der Mittelwerth den eigentlichen Normalwerth der Grösse darstellt, der unter der Einwirkung rein zufälliger Störungen die einzelnen Beobachtungswerthe ergibt.

Diese Bedingung der Zufälligkeit der Abweichungen genügt, um eine symmetrische Vertheilung der (sehr zahlreich anzunehmenden) Einzelwerthe um das arithmetische Mittel, das zugleich als Dichtigkeitsmittel erscheint, zu erzeugen, und diese besondere symmetrische Vertheilung, die durch eine einzige, spezielle Formel, nämlich durch die bereits erwähnte Function F_u gegeben wird, ist diejenige, die allein mit der Unverbundenheit der Elemente einer Masse vereinbar und überhaupt ohne Zahlenmagie begreiflich ist.

Als typisches Mittel bezeichnen wir nun eben ein solches, das nicht nur (wenigstens näherungsweise) die drei oben betrachteten Mittel in sich vereinigt, sondern auch mit einer solchen Gruppirung der Einzelwerthe verbunden ist, die der Annahme rein zufälliger Störungen eines Normalwerthes entspricht.

Es ist jedenfalls das Hauptverdienst Quételets auf dem Gebiete der theoretischen Statistik, dass er die Bedeutung des typischen Mittels erkannt und zugleich nachgewiesen hat, dass gewisse den Menschen betreffende Beobachtungsmassen sich annähernd der mathematischen Fehlertheorie entsprechend gruppiren. Dass er statt der Function F_u eine elementare Näherungsformel in Gestalt der Binomialreihe anwandte und bei der Vergleichung von Theorie und Beobachtung ein empirisches, einigermassen willkürliches Ver-

fahren anwandte, ist von keinem Belange. Auffallend dagegen ist es, dass Quételet und seine Nachfolger in diesen Untersuchungen nicht über die Grenzen der eigentlichen Anthropometrie, einer mehr naturwissenschaftlichen Disciplin, hinausgegangen sind, während die Methode doch eine sehr allgemeine Anwendung auf Bevölkerungs- und Mortalitätsstatistik gestattet. Die Möglichkeit einer allgemeinen Verwerthung der Methode hat Quételet ohne Zweifel nicht verkannt; aber wahrscheinlich glaubte er, dass das vorhandene Material für solche Untersuchungen noch nicht ausreichend sei.

30. Es wird sogar möglich sein, auch intensive Grössen, Eigenschaften, die gradweise verschieden aber nicht quantitativ messbar sind, auf ihren typischen Charakter zu untersuchen. Es wäre hier namentlich auf eine Abhandlung von F. Galton zu verweisen, die an einem für den Statistiker etwas abseits liegenden Orte erschienen ist.[1] Sie führt den Titel „Statistics by intercomparison", was man im Deutschen etwa durch „Staffelungsmethode der Statistik" wiedergeben kann. Das Eigenthümliche dieser Methode ist dies, dass die einzelnen Untersuchungsgegenstände nicht absolut gemessen, sondern nur nach ihrer Grösse oder dem Grade einer besonderen Eigenschaft stufenweise geordnet oder aufgestaffelt werden. Will man z. B. rasch die mittlere Grösse der Eingeborenen eines Landes bestimmen, so genügt es, wenn man einige Hundert Individuen nach der Grösse geordnet nebeneinander stellt und das in der Mitte stehende herausnimmt. Dieses mittlere Individuum wird dann mit genügender Genauigkeit die typische Grösse der Rasse darstellen, und es reicht also zu deren Bestimmung eine einzige Messung aus. Misst man ausserdem noch diejenigen, welche am Ende des ersten und des dritten Viertels der ganzen Reihe stehen, so erhält man die wahrscheinliche Abweichung vom Typus, die umgekehrt der Präcision proportional ist, mit welcher der Typus zum Ausdruck gebracht wird. Diese wahrscheinliche Abweichung muss sich zu beiden Seiten des Mittelwerthes annähernd gleich ergeben, wenn der letztere wirklich eine typische Bedeutung haben soll. Galton hat nun darauf hingewiesen, dass sich dieses Verfahren auf alle graduell auftretenden Eigenschaften anwenden lasse. Z. B. um die durchschnittliche Begabung eines Schulkindes darzustellen, ordne man die ganze Classe

[1]) Philosophical Magazine, vol. 49. Jan. 1875 S. 33.

nach der Befähigung der Einzelnen und man kann das in der Mitte stehende Individuum als Durchschnittstypus ansehen.

Ich glaube, dass diese Methode besonders in der Ethnographie sehr fruchtbar gemacht werden könnte. Bei den Variationen von organischen Rassen und Arten werden wir im Allgemeinen das Vorhandensein eines Typus, der zufällig gestört wird, voraussetzen dürfen, wenn sich auch nicht, wie dies bei einfachen Messungen der Körperlänge der Fall ist, die Wirkung gleicher Störungscomplexe von entgegengesetztem Charakter in Abweichungen vom Mittel zeigt, die als gleich und entgegengesetzt erkennbar sind. Ein geübter Ethnograph würde z. B. im Stande sein, aus 200 erwachsenen Individuen eines Negerstammes zunächst etwa 20 Gruppen zu bilden, deren Mitglieder nach ihrem ganzen Habitus eine möglichst grosse Aehnlichkeit unter einander besitzen; aus diesen Gruppen würden nun die beiden auszuscheiden sein, welche am verschiedensten von einander wären, und diese träten an die beiden Enden der zu bildenden Reihe; aus den 18 übrigen Gruppen würden abermals die beiden verschiedensten ausgewählt und zwischen die beiden vorerwähnten auseinander gestellt, und so würde man fortfahren, bis die sämmtlichen Individuen nach den Unterschieden ihres Rassenhabitus geordnet wären. Nur die mittleren Gruppen würden noch einer genaueren Vergleichung ihrer Individuen bedürfen. So erhielte man in dem die Mitte einnehmenden Individuum eine Darstellung des Stammestypus und es wäre zugleich zu erwarten, dass sich zu beiden Seiten des Mittelmannes eine grössere Anzahl von Individuen findet, die dem Typus sehr nahe kommen. Photographirt man ausser dem mittleren auch noch die am Ende des 1. und 3. Viertels der Reihe stehenden Individuen, so erhält man auch exacte Anhaltspunkte über die Veränderlichkeit des Typus. Bei einem unvermischten Naturstamme werden diese wahrscheinlichen Abweichungen vermuthlich sehr mässig sein, während bei einer Mulattenbevölkerung, in der die Rasse des Vaters (Weisser) oder der Mutter (Negerin) in einzelnen Fällen stark überwiegen kann, wohl auch schon eine auffallendere wahrscheinliche Abweichung hervortreten dürfte.

Bei kraniologischen Untersuchungen wäre zuerst festzustellen, ob die Mittel von gewissen Schädelmaassen oder Maassverhältnissen sich als Typen nachweisen liessen, was bei der eigenthümlichen Wechselwirkung organischer Formverhältnisse von vorn herein gar

nicht gewiss ist.[1]) Lässt sich dieser Nachweis nicht liefern, so muss man den typischen Habitus eines Rassenschädels nach der obigen Methode ermitteln, wozu man freilich eine beträchtliche Anzahl von Exemplaren bedarf.

31. Diese anthropometrischen und ethnologischen Untersuchungen fallen indess mehr in das Gebiet der Naturwissenschaften, als in das der Bevölkerungsstatistik. Im Folgenden aber soll der Versuch gemacht werden, eine spezifisch statistische Frage nach der Theorie der typischen Grössen zu beleuchten: ich meine die Absterbeordnung einer Generation.

Es sind bekanntlich zahlreiche Versuche gemacht worden, die „Mortalitätsgesetze“ durch mehr oder weniger empirische Formeln auszudrücken, so von Lambert, Babbage, Moser, Gompertz, Edmonds, Makeham, Lazarus und Anderen, und zwar drücken die Einen die Ueberlebenden, die Anderen aber die Sterbenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Altersjahre als Function des Alters aus — welches letztes Verfahren Ph. Fischer für das allein zweckmässige hält.

Nun bestehen ohne Zweifel in einer gegebenen Bevölkerungsschichte ziemlich constante Werthe für das Verhältniss der Zahl der Gestorbenen aus einer bestimmten Altersclasse zu der Zahl derjenigen, welche die untere Grenze dieser Classe überschritten haben; aber es ist zunächst sehr fraglich, ob diese relative Constanz eine solche ist, wie sie unter der Voraussetzung einer festen mathematischen Sterbenswahrscheinlichkeit zu erwarten wäre; ferner würden sich für verschiedene Bevölkerungsschichten verschiedene Sterblichkeitsverhältnisse als neben einander bestehend ergeben; und endlich ist gar kein Grund abzusehen, wesshalb irgend eine innere Verbindung zwischen den Sterblichkeitsverhältnissen der aufeinander folgenden Altersstufen bestehen sollte, wie es doch bei der Annahme einer das Absterben der Generation beherrschenden Formel vorausgesetzt wird. Die Sterbefälle der Generation bilden vielmehr eine unverbundene Massenerscheinung, sowohl rücksichtlich der Besetzung der einzelnen Altersclassen, als vollends in Bezug

---

[1]) Schon Cournot hat darauf aufmerksam gemacht, dass, falls ein rechtwinkliges Dreieck irgend wie veränderlich gedacht wird, die arithmetischen Mittel aus den Einzelwerthen jeder der drei Seiten sich nicht zu einem rechtwinkligen Dreieck vereinigen lassen.

auf das Verhältniss der Altersclassen neben einander. Es ist hier wieder an das bereits oben benützte Bild einer aufgehäuften Sandmasse zu erinnern; man kann durch eine empirische Formel wohl die Aussenseite der Anhäufung von Einzelfällen näherungsweise darstellen, aber diese Formel ist darum doch nicht ein die Elementar- wie die Integralerscheinung regelndes „Gesetz".

Die Sterblichkeitsverhältnisse sind also unter einem anderen Gesichtspunkte als dem der mechanischen Gesetzmässigkeit aufzufassen.

Es liegt die Annahme nahe, dass der organische Typus des Menschen, wie er eine gewisse normale Körpergrösse bedingt, so auch auf eine gewisse normale Lebenslänge eingerichtet ist. Diese Lebenslänge müsste sich als typisch nachweisen lassen, d. h. sie müsste bei zahlreichen Beobachtungen vollendeter Lebenslängen nicht nur als ein Dichtigkeitsmittel erscheinen, sondern es müssten sich auch die Abweichungen nach der positiven und negativen Seite der Function F_u gemäss gruppiren.

Machen wir uns zuerst ein correctes Bild von dem Absterben einer Generation.

Wir nehmen eine horizontale Grundlinie, die eine Geburtszeitstrecke, etwa ein Jahr, darstellen soll und denken uns auf derselben die Geburten einer gegebenen Bevölkerung nach ihrer Zeitfolge durch Punkte bezeichnet. In diesen Geburtspunkten errichten wir Senkrechte als „Lebenslinien", von denen jede durch einen Sterbepunkt zum Abschluss kommt. Jede solche abgeschlossene Senkrechte stellt also die beobachtete Lebenslänge eines Mitgliedes der untersuchten Generation dar und kann ebenso behandelt werden, wie eine gemessene Körperlänge. Die Lebenslängen sind jetzt gleichsam, nach der Geburtszeit geordnet, neben einander aufgestellt. Da der geringen Verschiedenheit der Geburtszeitpunkte kein wesentlicher Einfluss auf die typische Lebenslänge beizumessen ist, so können wir auch die senkrechten Lebenslinien in eine einzige zusammenschieben, auf der sich dann die sämmtlichen Sterbepunkte vertheilt finden. Wir theilen diese Hauptlinie in Jahresstrecken ab und betrachten nun die Dichtigkeit der Sterbepunkte in den einzelnen Altersstufen. Diese Dichtigkeit ist unmittelbar nach der Geburt absolut am stärksten, nimmt dann rasch ab und erreicht im Allgemeinen irgendwo zwischen dem 10. und 15. Altersjahre ein

Minimum, von wo aus in den nächsten Jahrzehnten nur ein sehr langsames, später aber ein schnelleres Anwachsen stattfindet bis in der Nähe der 70er Jahre ein zweites Maximum erscheint, dem wieder eine ziemlich schnelle Abnahme der Dichtigkeit der Sterbepunkte folgt.

32. Nun hat, wie bereits früher hervorgehoben wurde, das arithmetische Mittel aus der Gesammtheit dieser Lebenslängen keine typische, überhaupt keine physische Bedeutung. Es handelt sich für uns um die typische Lebenslänge des Menschen bei normaler Entwicklung; alle diejenigen Fälle also, in denen der Lebensfaden bereits abgeschnitten wurde, während das Individuum noch in der Bildung, im Heranwachsen begriffen war, können für die Bestimmung jener Normallänge ebensowenig in Betracht kommen, wie die Körperlänge der verstorbenen Kinder und Halbwüchsigen für die Feststellung des normalen Grössentypus.

Wir lassen also zunächst die sämmtlichen Verstorbenen der Kindheitsperiode, die man von der Geburt bis zu dem Minimum der Dichtigkeit der Sterbepunkte ausdehnen kann, gänzlich bei Seite. Die Punktendichtigkeit auf der übrigen Strecke würde sich nun graphisch versinnlichen lassen durch eine unsymmetrische Curve mit einem einzigen Ordinaten-Maximum in der Nähe der 70. Wenn es nun überhaupt eine typische Lebenslänge gibt, so ist diese dargestellt durch die Abscisse jenes Maximums, die das Dichtigkeitsmittel der Endpunkte der Lebenslängen bestimmt. Zur Erklärung der Asymmetrie der Dichtigkeitscurve ist zu erwägen, dass auch vom Pubertätsalter bis etwa zum 35. oder 40. Lebensjahr der Tod im allgemeinen noch als ein vorzeitiger, abnormer, gewissermassen als ein von Aussen gekommener, nicht aber durch die typische Naturanlage des Menschen bedingter Unfall anzusehen ist. Damit stimmt denn auch, dass in dieser Periode das Alter für die Sterblichkeit am wenigsten in Betracht kommt, indem sich die Sterbepunkte fast gleichmässig über diese Strecke vertheilen. Im fünften Jahrzehnt aber fängt in der Regel schon die typische Sterblichkeit an einigermassen merklich zu werden, wenn auch die vorzeitige noch überwiegt; im sechsten Jahrzehnt pflegt dieses Verhältniss sich umzukehren und in der ersten Hälfte der 60er Jahre kann man annehmen, dass die typische Sterblichkeit allein massgebend wird. Von dieser Altersstufe ab also muss die Dichtigkeit der Sterbepunkte näherungsweise zu beiden Seiten des Dichtigkeitsmittels der

Function F_u entsprechen, wenn unsere Anschauung berechtigt sein soll.

Unsere Auffassung würde folgendem Bilde entsprechen.

Man denke sich, Jemand werfe von einem festen Standpunkte aus Kugeln mit der Absicht, dieselben auf eine in einer Entfernung von etwa 70 Fuss am Boden angebrachten Marke aufschlagen zu lassen. In Wirklichkeit werden die Endpunkte der Flugbahn der Kugeln theils vor theils hinter dem Ziele liegen, aber bei einer grossen Versuchsreihe werden sich dieselben näherungsweise nach der mathematischen Fehlertheorie vertheilen, mit um so geringerer Dispersion, also um so grösserer Präcision, je grösser die Geschicklichkeit des Werfenden ist.

Ferner aber nehmen wir an, dass ein gewisser Theil der Kugeln, die der Werfende ergreift, für den Wurf ungeeignet, etwa hohl sind und zu wenig Masse besitzen. Mit diesen Hohlkugeln stellt der Schleuderer gar keinen Versuch an, sondern er wirft sie einfach vor sich hin und sie kommen weiter nicht mehr in Betracht. Endlich aber sei eine andere Person damit beschäftigt, auf einer gewissen Strecke der Bahn die geschleuderten Kugeln im Fluge aufzufangen, und zwar so, dass sie auf der Strecke von 15 bis 40 Fuss Entfernung vom Anfangspunkt auf jeden Fuss im ganzen fast gleich häufig eingreift oder doch mit nur geringer Zunahme der Häufigkeit bei wachsender Entfernung.

Ueber eine Distanz von 45 oder 50 Fuss hinaus soll die relative Häufigkeit dieser Eingriffe rasch abnehmen, während nach und nach immer mehr Kugeln in ungestörter Flugbahn den Boden erreichen; bald wird die Zahl der auf eine Strecke von einem Fuss von selbst niederfallenden Kugeln schon grösser, als die Zahl der aufgefangenen pro Fuss der mittleren Strecke, und in einer Entfernung von etwa 60 Fuss hören jene Eingriffe so gut wie ganz auf.

Wenn in dieser Weise viele tausend Kugeln verwendet worden wären, so würde sich also Folgendes ergeben: eine gewisse Anzahl derselben würde in der Nähe des Ausgangspunktes angehäuft sein; es wären diese die als unbrauchbar verworfenen. Ein anderer Theil würde annähernd symmetrisch vor und hinter dem Ziele liegen, in dem sich das Dichtigkeitsmittel fände, während die Gruppirung zu beiden Seiten der Function F_u entspräche. Denkt man sich endlich die aufgefangenen Kugeln in den Entfernungen niedergelegt, wo sie eingehalten wurden, so bilden sie eine dritte Gruppe, die anfangs

mit zunehmender Entfernung nur langsam dichter wird, schliesslich aber in ihrer Dichtigkeit schnell abnimmt und in der Nähe von 60 Fuss Distanz verschwindet, nachdem sie in der letzten Strecke mit dem einen Ausläufer der zweiten Gruppe theilweise zusammengefallen ist. Es ist leicht einzusehen, dass die der Theorie entsprechende Anordnung der zweiten Gruppe durch das vorzeitige Einhalten eines Theiles der Kugeln (eben der dritten Gruppe) nicht beeinträchtigt wird.

Die erste Gruppe in diesem Bilde entspricht nun den „jugendlichen“, die dritte den „vorzeitigen“ und die zweite den „normalen“ Sterbefällen.

33. Man könnte vielleicht Anstoss nehmen an dem Uebergange der „vorzeitigen“ in die „normalen“ Sterbefälle. Es ist indess zu bedenken, dass dieselben Ursachen, welche einen „vorzeitigen“ Tod erzeugen, falls sie bei einem Individuum von 30 Jahren wirksam werden, recht wohl einen „normalen“ Sterbefall liefern können, wenn sie in den Altersclassen von mehr als 50 Jahren auftreten. Eigentliche Verunglückungen freilich würden auch in den höheren Altersstufen als abnorme Sterbefälle anzusehen sein, aber deren Zahl ist verhältnissmässig so gering, dass man sie vernachlässigen kann.

Es fragt sich nun, ob sich die hier dargelegte Anschauungsweise durch die Erfahrung rechtfertigen lässt.

Hier tritt uns von vornherein der Uebelstand entgegen, dass wir correcte Daten über das Absterben wirklicher Generationen noch nicht besitzen. Zur strengen Vergleichung von Theorie und Erfahrung wären etwa dreissigjährige Erhebungen der Verstorbenen nach Elementargesammtheiten erforderlich, mit deren Hülfe man das wirkliche Absterben einer Generation während des Haupttheiles der Periode der normalen Sterbefälle verfolgen könnte.

Die vorhandenen Sterblichkeitstabellen geben besten Falles nur eine Reihe von Sterbenswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Altersclassen, aus denen sich das Absterben, nicht einer wirklichen, sondern einer hypothetischen Generation darstellen lässt. Auch sind diese Tabellen häufig noch durch „Ausgleichungen“ idealisirt, damit „das Gesetz“ klarer hervortrete, während uns vor allen Dingen der wirkliche Verlauf der concreten Erscheinungen, die Vertheilung der wirklichen Sterbepunkte mit all ihren „zufälligen“ Modificationen interessirt.

Indess wird die aus den Tabellen hervorgehende Vertheilung der Sterbefälle nach Altersclassen in den verschiedenen Ländern wenigstens im Grossen und Ganzen auch der Sterbeordnung einer wirklichen Generation entsprechen, und wir werden uns daher bis auf Weiteres mit diesen Daten behelfen.

Nehmen wir zunächst einige der Tabellen, die Quételet in seiner Schrift „Tables de Mortalité" (Brux. 1872) S. 27 ff. zusammengestellt hat und die von den statistischen Bureaux der betreffenden Länder als Beiträge zu diesem wenig befriedigenden Versuche einer internationalen Mortalitätsstatistik geliefert worden sind.

Wir beginnen mit den belgischen Tabellen für beide Geschlechter. Die Zahlen sind reducirt auf eine Generation von 500 Lebendgeborenen, was natürlich eine blosse Rechnungsoperation ist und keinen Bezug auf das Gewicht derselben hat.

Unter der Rubrik „Tabellenzahl" sind die tabellarischen Zahlen der Sterbefälle in der daneben stehenden Alterstrecke angegeben, wobei die Bezeichnung 20—25 bedeutet: vom vollendeten 20sten Jahre bis zum vollendeten 25sten. Unter „Theorie" sind die normalen und in der folgenden Rubrik die „vorzeitigen" Sterbefälle angeführt, die aber, soweit sie in Klammern stehen, einfach als die thatsächliche Differenz zwischen den tabellarischen und theoretischen Zahlen anzusehen sind.

Belgien.

Männer.

Altersstrecke.	Tabellenzahl.	Theorie.	Vorzeitige.
15—20	13	—	13
20—25	14	—	14
25—30	17	(1)	16
30—35	16	(1)	15
35—40	17	(3)	14
40—45	17	(6)	11
45—50	17	(12)	7
50—55	20	19	(1)
55—60	29	27	(2)
60—65	36	34	(2)
65—67	15	14	(1)
*	*	*	*
67—70	20	21	(—1)
70—75	34	33	(1)
75—80	29	26	(3)

Altersstrecke.	Tabellenzahl.	Theorie.	Vorzeitige.
80—85	21	18	(3)
85—90	9	10	(—1)
90—95	3	5	(—2)
Ueber 95	1	4	(—3)

Normalalter: 67 Jahre. Präcision 0,0546 (aus 67—75).

Wahrscheinliche Abweichung: ± 8.73 Jahre; sollte nach der Theorie je 58.5 Sterbefälle umfassen; die Tabelle ergibt nach aufwärts $62^1/_4$, nach abwärts $59^1/_4$ Fälle in diesen Gränzen.

Die Normalgruppe der Sterbefälle = 4 × 58.5 = 234 oder 46.8 % der zu Grunde gelegten Generation.

Frauen.

Altersstrecke.	Tabellenzahl.	Theorie.	Vorzeitige.
15—20	13	—	13
20—25	16	—	16
25—30	15	—	15
30—35	14	—	14
35—40	15	—	15
40—45	18	—	18
45—50	19	(2)	17
50—55	23	(4)	19
55—60	23	(12)	11
60—65	25	24	(1)
65—70	33	$35^1/_2$	$(—2^1/_2)$
$70—72^1/_2$	$21^1/_2$	21	$(^1/_2)$
*	*	*	*
$72^1/_2—75$	$21^1/_2$	21	$(^1/_2)$
75—80	35	$35^1/_2$	$(—^1/_2)$
80—85	23	24	(—1)
85—90	13	12	(1)
Ueber 90	5	6	(—1)

Normalalter: $72^1/_2$. Präcision: 0,076 (aus $72^1/_2$—80).

Wahrscheinliche Abweichung: ± 6,275 Jahr — nach der Theorie je $47^3/_4$ Fälle umfassend; nach der Tabelle aufwärts und abwärts 48 Fälle.

Die Normalgruppe der Sterbefälle = 4 × $47^3/_4$ = 191 oder 38.2 % der Generation.

34. Ueber die Berechnung der theoretischen Zahlen ist Folgendes zu bemerken. [1])

[1]) Bei den Interpolationen, die bei diesen Berechnungen nöthig waren, sind immer die tabellarischen Zahlen für die Sterbefälle in einjährigen Altersclassen zu Grunde gelegt worden.

Da das typische Normalalter nur bis auf ein halbes, höchstens ein Vierteljahr genau bestimmt zu werden braucht, so gelangt man dazu durch eine einfache Schätzung der Lage des Dichtigkeitsmittels der normalen Sterbefälle. In der Tabelle über die Mortalität der Männer findet man für die Altersstrecke 60—65: 36; 65—70: 35; 70—75: 34 Sterbefälle, während vor und nach diesen drei Perioden die Sterbedichtigkeit eine erheblich geringere ist; man wird also das Dichtigkeitsmittel etwas oberhalb der Mitte der Strecke 65—70 anzunehmen haben, also, wie oben geschehen, etwa zu Ende des 67. Jahres. In der Tabelle über die weibliche Sterblichkeit aber hat man ober- und unterhalb der Strecke 70—75 zunächst eine symmetrische Vertheilung der Sterbefälle, so dass man das Normalalter auf $72^1/_2$ annehmen kann.

Von diesen geschätzten Normalaltern aus berechnet man nun vorläufig die theoretische Vertheilung; schliesslich aber kann man versuchen, ob sich vielleicht durch eine Verschiebung des Normalalters um $^1/_4$ oder $^1/_2$ Jahr eine bessere Uebereinstimmung zwischen den tabellarischen und den theoretischen Zahlen erzielen lässt.

Es ist jetzt die Präcision h zu bestimmen, die mit der Abweichung x multiplicirt das Argument u in der Tabelle der Function F_u gibt.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass die empirische, d. h. die tabellarische Vertheilung der Sterbefälle auf einer einigermassen grossen Altersstrecke vom Normalalter aus dem Wahrscheinlichkeitsgesetz hinlänglich genau entspricht. In der ersten der obigen Tabellen ist die Strecke 67 bis 75, in der zweiten $72^1/_2$ bis 80 gewählt. Nun fallen nach der ersten Tabelle empirisch zwischen die Altersstufen von 67 und 75 Jahren 54 Fälle, indem überhaupt über 67 Jahre hinaus 117 Fälle vorkommen, welche dem einen, rein hervortretenden Zweige der Wahrscheinlichkeitscurve entsprechen, während die ganze Normalgruppe 234 Fälle enthält. Demnach können wir die Wahrscheinlichkeit, dass eine der normalen Gruppe angehörende Lebenslänge um höchstens $\pm$ 8 Jahre von dem typischen Mittel abweiche, gleich $\frac{54}{117}$ oder 0.463 setzen. Dieser Werth ist nun unter der Rubrik F_u aufzusuchen und es entspricht ihm in der Tabelle der Werth $u = 0.437 = hx$; es ist aber x in diesem Falle gleich 8, positiv oder negativ genommen, und man findet folglich $h = 0{,}0546$. Mit Hülfe dieser Präcision lassen sich nun die theoretischen Wahrscheinlichkeiten für jede beliebige Ab-

weichung nach der einen und der anderen Seite hin berechnen. Z. B. für $x = 3$, entsprechend der Altersgrenze 70, hat man $u = 3 \times 0.0546 = 0.161$; diesem Werthe entspricht $F_u = 0.183$, und das würde also die Wahrscheinlichkeit sein, dass eine Lebenslänge der Normalgruppe zwischen den Grenzen 67—3 und 67 + 3 falle; bei einer Stärke der Normalgruppe von 234 wären also in dieser Strecke annähernd 0.183×234 oder 38.8 Fälle und zwischen 67 und 70 demnach 0.183×117 oder 19.4 Fälle zu erwarten.

Die wahrscheinliche Abweichung in der Normalgruppe, die also ebenso oft nicht erreicht wie überschritten wird, findet man durch Division der Präcision in die Constante $\varrho = 0.4769$, also in diesem Falle $\frac{0.4769}{0.0546} = 8.73$. In dieser Strecke muss zu beiden Seiten des typischen Mittels je ein Viertel der ganzen Gruppe von 234 Fällen liegen, was mit der Vertheilung der empirischen Tabellenwerthe befriedigend übereinstimmt.[1])

35. Ueberhaupt wird nicht zu bestreiten sein, dass die tabellarischen und die theoretischen Werthe in den beiden Zusammenstellungen des Paragraphen 33 so nahe übereinstimmen, wie man in Erwägung der Unsicherheit der ersteren und des durch die Zufallstheorie gestatteten Spielraums der letzteren nur irgend erwarten kann. In der zweiten Tabelle ist die Uebereinstimmung noch vollständiger als in der ersten, und auch der theoretische wahrscheinliche Fehler wird hier empirisch sehr genau bestätigt.

Man kann demnach sagen, dass volle drei Viertel der Normalgruppe der Sterbefälle hinlänglich klar in der Vertheilung hervortreten, die durch die Zufallstheorie a priori gegeben wird; nur das erste Viertel ist gleichsam überlagert von der keilförmig auslaufenden Schicht der „vorzeitigen“ Sterbefälle. Feinere Untersuchungen mit correctem Material müssen erst ergeben, ob nicht eine dünne Lage dieser Schicht sich noch weiter, vielleicht sogar über das Dichtigkeitsmittel hinaus fortsetzt. In der ersten Tabelle könnte man etwas derartiges zu erkennen glauben, aber die Unsicherheit

---

[1]) Man könnte auch von dem empirischen wahrscheinlichen Fehler ausgehen, d. h. durch Interpolation die Distanz vom Normalalter 67 bestimmen, in welcher $58\frac{1}{2}$ Fälle vorkommen. Diese Distanz in ϱ dividirt würde eine Präcision ergeben, die von der oben gefundenen nur wenig abweicht und aus der sich also auch im wesentlichen dieselbe theoretische Vertheilung der Fälle der Normalgruppe berechnen würde.

der tabellarischen Daten ist zu gross, um einen solchen Schluss mit Bestimmtheit zu gestatten.

Was den speciellen Inhalt der beiden obigen Tabellen betrifft, so ist besonders bemerkenswerth der ungewöhnlich grosse Unterschied des „Normalalters“ der beiden Geschlechter. Dieser Unterschied wird zu Ungunsten der Männer noch verschärft durch die geringere Präcision der Vertheilung, d. h. durch die grössere Dispersion der Normalgruppe der Männer, deren letzte Ausläufer bis in die Altersstrecke 25—30 reichen. Schon in dieser Altersclasse wird also nach der vorliegenden Tabelle das normale Absterben der Männer leise merklich, während es in der Strecke 35—40 bereits fühlbarer hervortritt, als bei den Frauen in der Strecke 45—50. Wegen dieser stärkeren Dispersion ist es für die Männer auch kein Gewinn, dass ihre Normalgruppe grösser ist als die der Frauen.

In Betreff der Normalgruppe ist im Allgemeinen zu bemerken, dass zu ihrer Bestimmung drei Elemente nothwendig und hinreichend sind: 1) das Normalalter als Mittelpunkt derselben, 2) die Präcision oder die aus derselben unmittelbar abzuleitende wahrscheinliche Abweichung, und 3) die absolute Grösse der Gruppe, die erhalten wird durch Verdoppelung der Zahl der Sterbefälle, welche über das Normalalter hinausfallen.

Die Normalgruppe ist von der Gruppe der „jugendlichen“ Sterbefälle, wie bereits hervorgehoben wurde, ganz unabhängig; doch ist der Vergleichung wegen die Frage nicht uninteressant, wie gross die letztere Gruppe sich nach den belgischen Tabellen herausstellt. Ihre Abgrenzung hat allerdings etwas Willkürliches; doch dürfte es am passendsten sein, sie abzuschliessen mit dem Ende desjenigen Altersjahres, welches zuerst ein Minimum der Sterbefälle aufweist. Hiernach ergäbe sich beim männlichen Geschlecht in Belgien das Ende des 10., beim weiblichen das Ende des 12. Altersjahres als Grenze für die Strecke der jugendlichen Sterblichkeit, und die Stärke der Gruppe würde auf 500 Geborene resp. 159 und 157 oder 31.8 und 31.4 Procent betragen. Für die Gruppe der „vorzeitig“ Gestorbenen blieben nun bei den Männern 21.4 und bei den Frauen 30.4 % übrig. Die angeführten Zahlen haben natürlich keinen allgemeinen Werth, und selbst für Belgien mögen exactere Sterblichkeitstabellen andere Resultate ergeben; es sollte nur auf die ziemlich zahlreichen Elemente hingewiesen wer-

den, welche das Gesammtbild der Mortalität eines Landes zusammensetzen, und es zeigt sich dabei wieder, wie wenig man von einer einzigen „Ziffer“ zur Charakterisirung dieser verwickelten Verhältnisse erwarten darf.

36. Wir betrachten nun noch einige andere Sterblichkeitstabellen aus der angeführten Zusammenstellung, jedoch mit Weglassung der leicht herzustellenden Rubrik der Vorzeitigen.

Frankreich.

Männer.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	15	—
45—50	16	(2)
50—55	19	(4)
55—60	24	(12)
60—65	32	(24)
65—70	38	37
70—72½	20	21
*	*	*
72½—75	20	21
75—80	38	37
80—85	26	24
85—90	12	12
Ueber 90	4	6

Normalalter: 72½.
Präcision: 0.076 (aus 72½—80).
Wahrsch. Abw.: ± 6.275 Jahre; soll umfassen je 50 Fälle, was oben und unten zutrifft.
Normalgruppe: 200 Fälle = 40.0 % der Generation.

Frauen.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	14	—
45—50	15	(2)
55—55	18	(7)
55—60	23	(16)
60—65	31	28
65—70	39	40
70—72	17	18
*	*	*
72—75	27	27
75—80	38	38
80—85	26	26
85—90	14	14
Ueber 90	7	8

Normalalter: 72.
Präcision: 0.071 (aus 72—80).
Wahrsch. Abw.: ± 6.72 Jahre; soll umfassen je 56 Fälle; in der Tabelle: aufwärts 55, abwärts 56 Fälle.
Normalgruppe: 224 Fälle = 44.8 % der Generation.

Die Uebereinstimmung der empirischen und der theoretischen Zahlen ist durchaus befriedigend, in der zweiten Tabelle sogar auffallend gross. Man darf indess nicht vergessen, dass die empirischen Zahlen selbst nur annähernd das Absterben einer wirklichen Generation darstellen.

Die Verhältnisse der beiden Geschlechter zeigen, im Gegensatz zu Belgien, keinen erheblichen Unterschied. Die geringe Differenz im Normalalter würde vielleicht bei der Benützung von correkterem

Material ganz verschwinden. Die Frauen weisen jedoch eine etwas stärkere Normalgruppe auf, was unter den vorliegenden Umständen, da das Normalalter und die Vertheilungspräcision bei beiden Geschlechtern nahezu gleich sind, den Männern gegenüber eine Begünstigung darstellt.

Die jugendliche Gruppe der Gestorbenen wäre nach den hier zu Grunde gelegten Tabellen und der oben angegebenen Regel beim männlichen Geschlecht mit dem vollendeten 12., bei dem weiblichen mit dem vollendeten 15. Jahre abzuschliessen; sie würde hiernach resp. 169 und 162 Fälle oder 33.8 und 32.4 Procent der Generation umfassen.

Auf die vorzeitigen Sterbefälle kämen dann noch resp. 26.2 und 22.8 Procent. In dem geringeren Procentsatz der vorzeitig gestorbenen Frauen zeigt sich der Vortheil der grösseren Normalgruppe.

Als nächstes Beispiel betrachten wir die Mortalitätstabellen von

Norwegen.

Männer.			Frauen.		
Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.	Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	16	(1)	40—45	16	—
45—50	17	(2)	45—50	16	(2)
50—55	21	(6)	50—55	17	(4)
55—60	24	(15)	55—60	22	(12)
60—65	29	26	60—65	27	25
65—70	39	39	65—70	40	41
70—74	39	37	70—75	51	51
*	*	*	*	*	*
74—75	9	9	75—80	48	51
75—80	45	45	80—85	44	41
80—85	38	34	85—90	27	25
85—90	22	21	90—95	11	12
90—95	8	10	Ueber 95	5	6
Ueber 95	2	5	—	—	—

Männer:

Normalalter: 74.

Präcision: 0.068 (aus 74—80).

Wahrsch. Abw.: ± 7.01 Jahre; soll umfassen je 62 Fälle; nach der Tabelle aufwärts 64, abwärts 63 Fälle.

Normalgruppe 248 Fälle oder 49.6% der Generation.

Frauen:

Normalalter: 75.

Präcision: 0.0705 (aus 75—85).

Wahrsch. Abw.: ± 6.76 Jahre; soll umfassen je 67½ Fälle; nach der Tabelle aufwärts 66¾, abwärts 63¼ Fälle.

Normalgruppe: 270 Fälle oder 54.0% der Generation.

Die bekannte norwegische Langlebigkeit äussert sich hier in den hohen Ziffern des Normalalters und in der starken Besetzung der Normalgruppe. Durch das Zusammentreffen einer grösseren Präcision mit diesen beiden Umständen würden die Mortalitätsverhältnisse Norwegens sich noch günstiger charakterisiren, da sich alsdann die normale Sterblichkeit erst später fühlbar machen würde.

Die Periode der jugendlichen Sterblichkeit schliesst beim männlichen Geschlecht mit dem 15. und beim weiblichen mit dem 16. Altersjahre, und diese Gruppe umfasst resp. 26.6 und 23.6 Proc. der Generation. Es bleiben somit als vorzeitige Sterbefälle bei den Männern 23.8 Proc., bei den Frauen 22.4 Proc.

37. Die Sterblichkeitstabelle für die Schweiz ergibt Folgendes:

Männer.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	18	(1)
45—50	19	(2)
50—55	23	(8)
55—60	27	(19)
60—65	37	36
65—70	47	48
*	*	*
70—75	46	48
75—80	38	36
80—85	20	19
85—90	8	8
Ueber 90	2	3

Normalalter: 70.
Präcision: 0.0791 (aus 70—80).
Wahrsch. Abw.: ± 6.03 Jahr; soll umfassen 57 Fälle; nach der Tabelle aufwärts 56, abwärts 53 Fälle.
Normalgruppe: 228 Fälle = 45.6 % der Generation.
Jugendliche Sterbefälle (bis 10 Jahr incl.): 31.0 %.
Vorzeitige: 23.4 %.

Frauen.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	17	(1)
45—50	18	(2)
50—55	23	(8)
55—60	29	(22)
60—65	39	37
65—69½	46½	43
*	*	*
69½—75	49½	49½
75—80	39	36
80—85	17	19
85—90	9	8
Ueber 90	1	3

Normalalter: 69½.
Präcision: 0.0758 (aus 69½—75).
Wahrsch. Abw.: ± 6.29 Jahr; soll umfassen 57¾ Fälle; nach der Tabelle aufwärts 62½, abwärts 55 Fälle.
Normalgruppe: 231 Fälle = 46.2 % der Generation.
Jugendliche Sterbefälle (bis 12 J. incl.) 28.4 %.
Vorzeitige: 25.4 %.

Bayern.

Männer.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	13	—
45—50	16	(2)
50—55	19	(6)
55—60	22	(14)
60—65	28	24
65—70	29	32
*	*	*
70—75	30	32
75—80	26	24
80—85	14	14
85—90	6	6
Ueber 90	3	2
—	—	—

Normalalter: 70.
Präcision: 0.0761 (aus 70—80).
Wahrsch. Abw.: ± 6.27 Jahr; soll umfassen 39 Fälle; nach der Tabelle aufwärts 38, abwärts 39 Fälle.
Normalgruppe: 156 Fälle = 31.2 % der Generation.
Jugendliche Sterbefälle (bis 12 J. incl.) 46.4 %.
Vorzeitige: 22.4 %.

Frauen.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	16	(1)
45—50	18	(3)
50—55	21	(8)
55—60	26	(18)
60—65	29	29
65—69	27	29
*	*	*
69—70	8	7
70—75	34	35
75—80	24	25
80—85	13	13
85—90	6	6
Ueber 90	3	2

Normalalter: 69.
Präcision: 0.0753 (aus 69—75).
Wahrsch. Abw.: ± 6.33 Jahr; soll umfassen 44 Fälle; nach der Tabelle aufwärts $42^1/_3$, abwärts $44^1/_3$ Fälle.
Normalgruppe: 176 Fälle = 35.2 % der Generation.
Jugendliche Sterbefälle (bis 10 J. incl.) 40.6 %.
Vorzeitige: 24.2 %.

38. Die bayerischen Tabellen in der Quételet'schen Sammlung sind von Hermann geliefert, aber es ist nichts darüber gesagt, ob sie nach der sogenannten „Hermann'schen“ Methode berechnet seien. Zu der vollständigen Anwendung dieser Methode ist noch nicht genügendes Material vorhanden. Will man indess nur die Vertheilung der Normalgruppe untersuchen, unabhängig von der Generation, aus der sie hervorgegangen, so gibt die bayerische Statistik das beste Material, um die Theorie mit Zahlen zu vergleichen, welche der concreten Darstellung des Absterbens einer wirklichen Generation wenigstens möglichst nahe kommen, indem die einzelnen Altersclassen „dritte Hauptgesammtheiten von Verstorbenen“ darstellen, welche von den eigentlich erforderlichen „ersten Haupt-

gesammtheiten“ im Ganzen nur wenig abweichen und je eine Elementargesammtheit mit den letzteren gemein haben.

Zur Anstellung einer Probe genügt schon die Zusammenstellung des bayerischen Materials in der von Quételet und Heuschling herausgegebenen Statistique internationale. Beginnen wir mit den im Verwaltungsjahre 1835/36 und in der 66. Altersclasse (also im Alter von 65 bis 66 Jahren) Gestorbenen und stellen darunter die Verstorbenen der 67., 68. u. s. w. Altersclasse aus dem ersten, zweiten u. s. w. folgenden Erhebungsjahre, so erhält man eine Reihe von Gesammtheiten von Verstorbenen, welche sehr ähnliche Verhältnisse aufweisen werden, wie wenn sie aus einer einzigen Generation hervorgegangen wären.

Fasst man die absoluten Zahlen für je fünf Jahresclassen zusammen, so erhält man:[1])

	Männer.		Frauen.	
Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.	Tab.-Zahl.	Theorie.
65—70	3134	3289	3448	3578
*	*	*	*	*
70—75	3193	3289	3418	3578
75—80	2603	2507	2841	2681
80—85	1639	1461	1580	1502
85—90	618	650	622	629
Ueber 90	145	291	182	253

Um den Grad der Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung im Vergleich mit den bisher betrachteten Tabellen richtig zu beurtheilen, darf man in den obigen Zahlen nur die beiden ersten Stellen, und zwar abgerundet, berücksichtigen, da man dann Grössen von ungefähr gleicher Ordnung mit den entsprechenden der übrigen Tabellen erhält. So findet man für die Männer folgende Reihen:

Beobachtung: 31 — 32 — 26 — 16 — 6 — 1
Theorie: 33 — 33 — 25 — 15 — 7 — 3

für die Frauen:

Beobachtung: 34 — 34 — 28 — 16 — 6 — 2
Theorie: 36 — 36 — 27 — 15 — 6 — 3

---

[1]) Die Zahl der Verstorbenen „über 90“ sind noch aus dem Sterbejahr 1859/60.

Die Uebereinstimmung der beobachteten und der theoretischen Werthen ist hiernach mit Rücksicht auf die Unsicherheit der ersteren und den Spielraum der letzteren als befriedigend anzusehen.

Das Normalalter ergibt sich jetzt bei beiden Geschlechtern zu 70 Jahren, was mit den beiden vorhergehenden bayerischen Tabellen unter den obwaltenden Umständen genügend stimmt.

Beim männlichen Geschlecht hat man ferner: Präcision 0.0743 (aus 70—80); wahrsch. Abw. ± 6.42 Jahr; soll umfassen 4099 Fälle; in Wirklichkeit findet man in diesen Grenzen: aufwärts 4001, abwärts 3991 Fälle; die absolute Anzahl der Normalgruppe beträgt 16,396;

beim weiblichen Geschlecht: Präcision: 0.0771 (aus 70—80); wahrsch. Abw.: ± 6.19 Jahr; soll umfassen 4322 Fälle; beobachtet: aufwärts 4299, abwärts 4155 Fälle; Normalgruppe 17,286.

Die Präcisionen weichen von den aus den beiden vorhergehenden bayerischen Tabellen abgeleiteten so wenig ab, als man bei Berücksichtigung der Verschiedenheit der empirischen Grundlagen erwarten darf.

39. Untersuchen wir nun auch noch einige aus anderen Quellen stammende Sterblichkeitstabellen. Zunächst die ältere englische von Farr,[1]) berechnet auf eine Generation von 512.7 Männern und 487.3 Frauen.

Männer.			Frauen.		
Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.	Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	18.3	(0.7)	40—45	16.9	(0.6)
45—50	19.4	(2.1)	45—50	17.5	(1.8)
50—55	20.2	(6.2)	50—55	18.0	(5.4)
55—60	25.5	(14.4)	55—60	22.5	(12.8)
60—63	18.6	(14.1)	60—63	16.8	(13.2)
63—65	13.6	11 9	63—65	12.5	11.0
65—70	37.7	36.8	65—70	35.6	35.0
70—72	15.9	16.3	70—73	23.3	24.2
*	*	*	*	*	*
72—75	23.7	24.2	73—75	15.8	16.3
75—80	35.5	35.0	75—80	37.2	36.7

[1]) Fifth report of the registrar general, London 1843, p. XVII.

Männer.			Frauen.		
Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.	Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
80—85	25.4	23.6	80—85	28.4	26.1
85—90	13.0	12.4	85—90	15.8	15.0
Ueber 90	4.8	7.2	Ueber 90	6'6	9.7

Normalalter: 72.
Präcision: 0.0710 (aus 72—80).
Wahrsch. Abw.: ± 6.72 Jahr; soll umfassen 51.2 Fälle; Tabelle: aufwärts 51.6, abwärts 50.9 Fälle.
Normalgruppe: 204.8 Fälle = 39.9 % der Generation.
Jugendliche Sterbefälle (bis 12 Jahr incl.): 39.9 %.
Vorzeitige: 28.4 %.

Normalalter: 73.
Präcision: 0.0699 (aus 73—80).
Wahrsch. Abw.: ± 6.82 Jahr; soll umfassen 51.9 Fälle; Tabelle: aufwärts 51.3, abwärts 51.7 Fälle.
Normalgruppe: 207.6 Fälle = 42.6 % der Generation.
Jugendliche Sterbefälle (bis 12 Jahr incl.): 29.2 %.
Vorzeitige: 28.2 %.

Die englische Tabelle ist übrigens eine ziemlich stark „ausgeglichene“. Ihre Zahlen sind nicht die unmittelbar aus den Daten der Registrirung und der Volkszählung berechneten, sondern mit Hülfe von Interpolationen gewonnen. Indess scheinen sie im Ganzen mit den Bruttoresultaten befriedigend übereinzustimmen.

Schweden.[1]

Männer (Gen.: 1000).			Frauen (Gen.: 1000).		
Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.	Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	34.2	(0.7)	45—50	32.3	(0.1)
45—50	40.1	(2.9)	50—55	39.4	(3.6)
50—55	48.5	(10.5)	55—60	51.2	(11.9)
55—60	58.5	(27.1)	60—65	67.5	(34.6)
60—64	56.2	(41.5)	65—68	49.0	(38.9)
64—65	15.4	13.1	68—70	35.5	32.9
65—70	81.5	81.5	70—73	57.5	57.4
70—72	34.9	36.8	73—75	38.9	39.4
*	*	*	*	*	*
72—75	52.4	54.7	75—77	39.4	39.4
75—80	79.1	76.8	77—80	57.4	57.4
80—85	53.3	48.7	80—85	73.8	71.8

[1]) Nach der neuesten schwedischen Sterblichkeitstafel in „Bidrag till Sveriges off. stat.; Befolknings-stat., ny f. XII., 3. Stockholm 1874, p. 122.

Männer.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
80—90	23.8	23.0
Ueber 90	5.4	10.8
—	—	—

Normalalter: 72.

Präcision: 0.0768 (aus 72—80).

Wahrsch. Abw.: ± 6.21; soll umfassen 107.0 Fälle; Tabelle: aufwärts 104.5, abwärts 105.6 Fälle.

Normalgruppe: 42.8% der Generation.

Jugendliche Sterbefälle (bis 15 Jahr incl.): 29.8%.

Vorzeitige: 27.4%.

Frauen.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
85—90	37.0	34.6
90—95	9.6	11.9
Ueber 95	1.6	3.7

Normalalter: 75.

Präcision: 0.0805 (aus 75—80).

Wahrsch. Abw.: ± 5.92; soll umfassen 109.4 Fälle; Tabelle: aufwärts 113.1, abwärts 113.3 Fälle.

Normalgruppe: 43.8%.

Jugendliche Sterbefälle (bis 14 Jahr incl.) 27.0%.

Vorzeitige: 29.2%.

Die schwedische Tabelle ist mit Hülfe der mittleren Bevölkerungszahlen für die zehn Jahre 1861—70 berechnet; eine auf etwas verschiedener Grundlage berechnete Tabelle findet sich in demselben Hefte der amtlichen Statistik pag. LXII. Beide Tabellen, deren Unterschiede im Ganzen nicht sehr bedeutend sind, stellen natürlich, wie alle übrigen, nur näherungsweise das Absterben einer wirklichen Generation dar.

Eine andere Sterblichkeitstabelle neuesten Datums ist die von R. Böckh für Preussen mitgetheilte.[1])

Die Vergleichung derselben mit der Theorie ergibt Folgendes (auf je 1000 Lebendgeborene):

Männer.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	32.0	(1.2)
45—50	37.8	(4.6)
50—55	44.7	(13.4)
55—60	54.6	(30.3)
60—63	35.6	(28.4)

Frauen.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	30.9	(0.6)
45—50	32.0	(2.6)
50—55	38.8	(9.6)
55—60	52.2	(25.8)
60—63	37.5	(27.4)

[1]) Hildebrand und Conrad, Jahrb. für Nat. u. Stat. 1875, XXV. B. S. 201 ff.

Männer.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
63—65	24.7	23.2
65—70	65.1	67.6
*	*	*
70—75	65.0	67.6
75—80	54.2	51.6
80—85	33.2	30.3
85—90	12.5	13.4
Ueber 90	4.1	6.1
—	—	—

Normalalter: 70.

Präcision: 0.0741 (aus 70—80).

Wahrsch. Abw.: ± 6.44 Jahr; soll umfassen 84.5 Fälle; Tabelle: aufwärts 83.0, abwärts 82.1 Fälle.

Normalgruppe: 33.8 % der Generation.

Jugendliche Sterbefälle (bis 15 Jahr incl.) 41.7 %.

Vorzeitige: 24.5 %.

Frauen.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
63—65	25.5	23.8
65—70	73.0	74.2
70—71	16.2	16.2
*	*	*
71—75	60.9	62.9
75—80	63.5	61.5
80—85	36.7	35.3
85—90	14.1	14.7
Ueber 90	5.0	5.8

Normalalter: 71.

Präcision: 0.0798 (aus 71—80).

Wahrsch. Abw.: ± 5.98 Jahr; soll umfassen 90.1 Fälle; Tabelle: aufwärts 89.2, abwärts 88.0 Fälle.

Normalgruppe: 36.0 % der Generation.

Jugendliche Sterbefälle (bis 14 Jahr incl.) 35.7 %.

Vorzeitige: 28.3 %.

40. Wie die Sterblichkeitsverhältnisse sich in verschiedenen Ländern verschieden gestalten, so wird man auch in demselben Lande nach geographischen Bezirken oder auch nach socialen und wirthschaftlichen Verhältnissen einigermassen verschiedene Tabellen aufstellen können.

Beispielsweise wollen wir zwei Sterblichkeitstafeln untersuchen, die von der niederländischen amtlichen Statistik einestheils für die hinsichtlich der Mortalität am ungünstigsten gestellten vier Provinzen Nord- und Süd-Holland, Seeland und Utrecht und anderntheils für die übrigen 7 Provinzen aufgestellt worden sind.[1] Die Zahlen sind bezogen auf je 1000 Lebendgeborene.

---

[1]) Stat. Jaarboek voor het koningr. der Nederlanden. 14. u. 15. Jahrg. S. 390 ff.

Vier Provinzen.

Männer.			Frauen.		
Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.	Alter.	Tab.Zahl.	Theorie.
40—45	35.5	(1.6)	40—45	33.9	(2.6)
45—50	38.1	(10.9)	45—50	31.2	(6.9)
50—55	48.0	(24.4)	50—55	38.8	(17.2)
55—58	29.5	(20.9)	55—58	27.3	(18.1)
58—60	20.9	17.2	58—60	17.7	15.8
60—65	52.9	52.0	60—65	52.8	53.4
65—68	37.5	35.1	65—70	67.0	66.9
*	*	*	*	*	*
68—70	22.8	23.5	70—75	66.8	66.9
70—75	54.9	54.2	75—80	55.7	53.4
75—80	43.6	40.8	80—82	18.6	15.8
80—85	28.8	25.3	82—85	20.0	18.1
85—90	11.1	12.8	85—90	14.5	17.2
Ueber 90	3.1	7.7	Ueber 90	5.4	9.8

Sieben Provinzen.

40—45	35.7	(1.3)	40—45	37.9	(0.8)
45—50	40.5	(4.8)	45—50	33.4	(3.1)
50—55	50.6	(14.5)	50—55	41.9	(10.6)
55—60	57.4	(32.6)	55—60	49.0	(27.2)
60—63	36.8	(31.8)	60—63	35.7	(29.6)
63—65	28.8	26.3	63—65	28.1	25.0
65—70	78.1	78.2	65—70	79.4	79.1
70—71	16.6	17.5	70—72	33.8	35.7
*	*	*	*	*	*
71—75	63.5	66.1	72—75	51.3	53.1
75—80	70.1	67.5	75—80	76.6	74.8
80—82	24.6	20.2	80—82	25.6	22.6
82—85	24.3	22.2	82—85	27.4	25.2
85—90	18.5	20.7	85—90	22.0	23.1
Ueber 90	6.3	10.6	Ueber 90	7.2	11.3

Die Präcisionen in den beiden ersten Tabellen sind aus den Zahlen für die Jahre 68—75 und 65—75, die der beiden anderen aus den Altersclassen 71—80 und 72—80 berechnet. Man hat nun zur Vergleichung:

Männer: 4 Provinzen: Normalalter 68 — Präcision: 0.0639 — Normalgruppe: 32.8 %.

7 Provinzen: Normalalter: 71 — Präcision: 0.0726 — Normalgruppe: 41.5 %.

Frauen: 4 Provinzen: Normalalter: 70 — Präcision: 0.0680 — Normalgruppe: 36.2 %.

7 Provinzen: Normalalter: 72 — Präcision: 0.0758 — Normalgruppe: 42.0 %.

Die drei Elemente sind also in der zweiten Gruppe günstiger als in der ersten und überdies in jeder Gruppe wieder günstiger für das weibliche als für das männliche Geschlecht.

Im Ganzen harmoniren in diesen Tabellen die theoretischen und die empirischen Daten weniger gut, als es bisher der Fall zu sein pflegte. Doch zeigt sich in den theoretischen und empirischen Werthen der wahrsch. Abweichungen wieder eine befriedigendere Uebereinstimmung. Man findet:

Vier Prov. Männer: w. Abw.: 7.46 J. entspr. 82.2 Fällen; Tab.: aufw. 85, abw. 82 Fälle.

Frauen: w. Abw.: 7.01 J. entspr. 90.5 Fällen; Tab.: aufw. 89.3, abw. 89.3 Fälle.

Sieben Prov. Männer: w. Abw.: 6.57 J. entspr. 103.7 Fällen; Tab.: aufw. 103.1, abwärts 102.0 Fälle.

Frauen: w. Abw.: 6.29 J. entspr. 105.5 Fällen; Tab.: aufw. 102.9, abw. 105.7 Fälle.

Die Verschiedenheit der Verhältnisse in den einzelnen Provinzen ist indess nicht so gross, dass nicht auch bei der Aufstellung einer Tabelle für das ganze Land noch eine der Theorie ungefähr entsprechende Vertheilung der Fälle um ein mittleres Normalalter hervortreten könnte.

Man findet demnach für das ganze Königreich:

Männer.			Frauen.		
Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.	Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
40—45	35.6	(1.8)	40—45	39.5	(1.0)
45—50	39.3	(6.2)	45—50	32.3	(3.6)
50—55	49.3	(16.2)	50—55	40.4	(11.2)
55—60	53.9	(33.7)	55 - 60	46.6	(27.3)
60—62	23.3	(19.5)	60—63	32.7	(27.3)

Männer.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
62—65	36.0	35.3
65—70	69.3	70.0
*	*	*
70—75	67.7	70.0
75—80	57.1	54.8
80—82	19.5	15.9
82—85	19.4	17.8
85—90	14.8	16.2
Ueber 90	4.7	8.5
—	—	—

Normalalter: 70.
Präcision: 0.0705 (aus 70—80).
Wahrsch. Abw.: ± 6.75 Jahr; soll umfassen 91.6 Fälle; Tabelle: aufwärts 93.1, abwärts 88.9 Fälle.
Normalgruppe: 36.6 % der Generation.
Jugendl. Sterbefälle (bis 14 J. incl.) 36.8 %.
Vorzeitige: 26.6 %.

Frauen.

Alter.	Tab.-Zahl.	Theorie.
63—65	25.7	23.3
65—70	73.3	71.8
70—71½	23.4	23.6
*	*	*
71½—75	52.6	54.3
75—80	66.1	64.4
80—82	22.1	19.2
82—85	23.7	21.6
85—90	18.2	19.7
Ueber 90	6.4	9.9

Normalalter: 71½.
Präcision: 0.0742 (aus 71½—80).
Wahrsch. Abw.: ± 6.43 Jahr; soll umfassen 94.6 Fälle; Tabelle: aufwärts 95.7, abwärts 94.2 Fälle.
Normalgruppe: 37.8 % der Generation.
Jugendl. Sterbefälle (bis 12 J. incl.): 33.9 %.
Vorzeitige: 28.3 %.

41. Die vorliegenden Beispiele dürften zahlreich genug sein, um zu beweisen, dass die hier dargelegte Theorie des Normalalters oder der „normalen Lebenslänge“ eine thatsächliche Grundlage besitzt. Wenn auch einzelne nicht unbeträchtliche Abweichungen zwischen den theoretischen und den tabellarischen Zahlen vorkommen, so ist doch im Ganzen die Uebereinstimmung eine befriedigende und in manchen Fällen eine überraschende.

Ueberdies stellen die vorkommenden Differenzen nicht Abweichungen zwischen der Theorie und den wirklichen Beobachtungen der Sterblichkeit einer Generation dar, sondern statt der letzteren haben wir nur tabellarische Näherungswerthe, die nur im Grossen und Ganzen der wirklichen Sterblichkeit entsprechen. Daher ist auch auf die oben gefundenen Werthe der Elemente der Normalgruppe an sich noch wenig Gewicht zu legen.

Gleichwohl dürfte die folgende Zusammenstellung nicht uninteressant sein:

	Männer.			Frauen.		
	Normalalter.	Normalgr.	Präcision.	Normalalter.	Normalgr.	Präcision.
Norwegen	74	49.6 %	ρ : 7.01	75	54.0 %	ρ : 6.76
Schweden	72	42.8	ρ : 6.21	75	43.8	ρ : 5.92
Frankreich	72½	40.0	ρ : 6.28	72	44.8	ρ : 6.72
England	72	39.9	ρ : 6.72	73	42.6	ρ : 6.82
Schweiz	70	45.6	ρ : 6.03	69½	46.2	ρ : 6.29
Holland	70	36.6	ρ : 6.75	71½	37.8	ρ : 6.43
Preussen	70	33.8	ρ : 6.44	71	36.0	ρ : 5.98
Bayern	70	31.2	ρ : 6.27	69	35.2	ρ : 6.33
Belgien	67	46.8	ρ : 8.73	72½	38.2	ρ : 6.28

Der grösseren Anschaulichkeit wegen ist die Präcision durch die Constante ρ (= 0.4769), dividirt durch die wahrscheinliche Abweichung, ausgedrückt.

Es ist leicht, Rechenschaft davon zu geben, wie sich durch die Aenderung eines der drei Elemente der Charakter der Sterblichkeitsverhältnisse verbessert oder verschlimmert. Hier genüge die Bemerkung, dass die Lage um so günstiger ist, je grösser die drei Elemente sind, und so ungünstiger, je kleiner dieselben werden. Wird das eine kleiner und das andere grösser, so kann eine Ausgleichung eintreten. So wird z. B. Belgien für das auffallend niedrige Normalalter der Männer einigermassen entschädigt durch die beträchtliche Grösse der Normalgruppe; freilich wird diese Entschädigung wieder beeinträchtigt durch die kleine Präcision. [1])

Mit der Normalgruppe ist natürlich auch die Summe der „jugendlichen" und der „vorzeitigen" Gruppe der Gestorbenen gegeben. Die immer etwas willkürliche Zerlegung dieser Summe ist hier nicht wiederholt, weil die obigen Elemente für die Beurtheilung der normalen Lebensverhältnisse ausreichen.

Numerische Untersuchungen dieser Art von gesichertem Werth können nur mit Hülfe von unmittelbarem, exact abgegränztem Beobachtungsmaterial durchgeführt werden, nicht aber aus tabellarischen Zahlen, die das Product eines Verarbeitungsprozesses sind. Unsere theoretische Formel ist nicht mit einer empirischen zu verwechseln; sie stellt den Lauf der Dinge nach dem abstracten Wahrscheinlichkeitsgesetz dar und sie gibt die einzig mögliche

---

[1]) Der kleinen Präcision entspricht natürlich eine grosse wahrscheinliche Abweichung im Nenner des Ausdrucks.

rationelle Erklärung der Symmetrie der Sterbefälle, die wenigstens auf einer gewissen Strecke ober- und unterhalb des Dichtigkeitsmittels unverkennbar nachzuweisen ist, eine Symmetrie, die durch eine empirische Formel nur als räthselhaftes Phänomen hingestellt, nicht aber erklärt werden könnte.

IV. Typische Wahrscheinlichkeitsgrössen.

42. Wenn man in der gewöhnlichen statistischen Technik aus gewissen speciellen Massenbeobachtungen Procentzahlen berechnet und diesen eine allgemeine Bedeutung beilegt für die die gleichartigen Massenerscheinungen überhaupt, so wird diese Annahme bei vielen Classen von Erscheinungen erfahrungsmässig zwar mehr oder weniger zutreffen, aber das ganze Verfahren ist gleichwohl ein rein empirisches, da jenes Procentverhältniss, als Bruch ausgedrückt, keineswegs ohne weiteres wegen seiner ungefähren Constanz auch schon den Charakter eines Näherungswerthes einer festen oder auch nur einer zufällig veränderlichen mathematischen Wahrscheinlichkeit besitzt. Um mit einiger Sicherheit den empirischen Verhältnisszahlen diesen bestimmten Charakter beilegen zu können, muss man mittelst einer grösseren Anzahl von Einzelwerthen zeigen, dass eine der Bedingungen *a)* oder *b)* des § 20 erfüllt ist, und überdies, namentlich im letzten Falle, dass die Einzelwerthe, absolut betrachtet, als typische Grössen erkennbar sind. Im ersten Falle hat man (§ 25) eine typische Wahrscheinlichkeitsgrösse mit normaler, im zweiten eine solche mit übernormaler Dispersion. Beide Arten von Wahrscheinlichkeiten sind nun aber in den menschlichen Massenerscheinungen, trotz der scheinbar oft grossen Constanz derselben, nur selten nachzuweisen, ja, es ist mir bisher eigentlich nur in einem einzigen Falle gelungen, eine unzweifelhafte typische Wahrscheinlichkeitsgrösse mit normaler Dispersion aufzufinden, und zwar ist dies die Wahrscheinlichkeit einer Knaben- oder Mädchengeburt, also eines in das physiologisch-naturwissenschaftliche Gebiet fallenden Vorganges.[1])

Dieser Gegenstand verdient daher schon dieser seiner theoreti-

---

[1]) S. die S. 28 citirte Abhandlung in den Jahrb. von Hildebrand und Conrad.

schen Eigenartigkeit wegen eine weitere Untersuchung, und ich lasse zunächst im Anschluss an meine frühere Arbeit eine weitere Reihe von Vergleichungen zwischen Beobachtung und Theorie hier folgen, deren Berechnung ich theilweise meinen Dorpater Zuhörern verdanke. Die Beobachtungsgrösse ist wieder die Zahl z der Knabengeburten (incl. Todtgeborenen) auf 1000 Mädchengeburten, also eine einfache Function der Wahrscheinlichkeit v einer Knabengeburt, indem $z = \frac{1000\, v}{1-v}$

Wir untersuchen nun wieder die monatlichen Werthe von z in den 34 preussischen Bezirken (Osnabrück und Aurich sind zusammengefasst, Hohenzollern und Militär im Auslande weggelassen) und zwar in den 3 Jahren 1870—72.

In jedem Bezirke haben wir also 36 Einzelwerthe aus ebenso vielen Beobachtungsreihen, denen wir unbedenklich gleiches Gewicht beilegen dürfen, da die monatlichen Geburtenzahlen in einem und demselben Bezirke verhältnissmässig nur wenig schwanken. Demnach ist (§ 20) n gleich 36, und wenn $[\delta^2]$ wieder die Summe der Quadrate der Abweichungen der 36 Einzelwerthe z von ihrem arithmetischen Mittel bezeichnet, so ist nach der Methode der kleinsten Quadrate die Präcision h der Einzelbestimmung von z in dem betrachteten Bezirke $= \sqrt{\frac{35}{2\,[\delta^2]}}$.

Andererseits aber ist dieselbe Präcision, ausgedrückt nach der combinatorischen Methode, $= \frac{(1-v)^2}{1000 \sqrt{2v\,(1-v)}} \sqrt{g}$, wenn g die mittlere monatliche Geburtenzahl des betreffenden Bezirkes in den drei Jahren und v die richtige Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt darstellt. Der letzteren werden wir möglichst nahe kommen, wenn wir die Zahl sämmtlicher Knabengeburten in Preussen von 1870—72 dividiren durch die Zahl sämmtlicher Geburten überhaupt in dem gleichen Zeitraum. Wir finden wieder wie in den Jahren 1868/69 $v = 0.515$, entsprechend $z = 1063$. Der Bruch, mit dem $\sqrt{g}$ multiplicirt wird, bleibt also für alle Bezirke gleich 0.0003328.

43. Die beiden ihrer Ableitung nach so verschiedenen Präcisionsbestimmungen müssen nun wenigstens einigermassen übereinstimmen, wenn v die Bedeutung einer typischen Wahrscheinlichkeit mit constanter Dispersion besitzen soll. Die folgenden Tabellen zeigen, wiefern dieses stattfindet. Die erste enthält die 17 grösseren, die zweite die 17 kleineren Bezirke, geordnet nach der mittleren

monatlichen Geburtenzahl. Unter *C* findet man die nach der combinatorischen (oder „statistischen") Methode berechneten Präcisionen, unter *Q* dagegen diejenigen, welche die Methode der kleinsten Quadrate („physikalische" Methode) ergibt. Zur Vergleichung sind auch die früher aus den monatlichen Beobachtungen der Jahre 1868—69 berechneten Präcisionen nochmals beigefügt, unter Verbesserung eines wenig erheblichen Rechenfehlers bei Magdeburg.

Grosse Bezirke.

	1870—72		1868—69		
	C	*Q*	*Q*	*C*	*MQ*
Oppeln	0.0231	0.0227	0.0214	0.0232	0.0221
Breslau	0230	0222	0205	0230	0214
Düsseldorf	0225	0225	0247	0218	0236
Posen	0204	0208	0205	0203	0207
Königsberg	0198	0234	0208	0195	0221
Frankfurt	0191	0164	0185	0189	0175
Arnsberg	0186	0208	0177	0180	0193
Potsdam	0184	0150	0176	0183	0163
Liegnitz	0181	0202	0163	0182	0183
Marienwerder	0180	0153	0249	0180	0201
Merseburg	0180	0187	0146	0179	0167
Schleswig	0174	0152	0118	0173	0135
Magdeburg	0173	0138	0174	0171	0156
Berlin	0172	0144	0158	0165	0151
Gumbinnen	0164	0173	0144	0159	0159
Cassel	0162	0158	0189	0164	0174
Stettin	0156	0165	0166	0155	0165

Kleine Bezirke.

Bromberg	0.0154	0.0129	0.0145	0.0154	0.0137
Cöln	0148	0159	0149	0146	0154
Trier	0145	0176	0148	0145	0162
Wiesbaden	0144	0108	0108	0143	0108
Cöslin	0143	0139	0119	0143	0129
Danzig	0142	0163	0151	0142	0157
Coblenz	0136	0114	0131	0137	0123
Aachen	0129	0118	0151	0128	0135

	C	Q	Q	C	MQ
Minden	0.0127	0.0122	0.0141	0.0127	0.0132
Osnab.-Aurich	0118	0144	0122	0116	0133
Erfurt	0116	0147	0142	0117	0145
Hannover	0114	0113	0130	0112	0122
Hildesheim	0113	0120	0114	0115	0117
Münster	0112	0107	0092	0111	0100
Lüneburg	0104	0105	0094	0104	0100
Stade	0099	0077	0093	0099	0085
Stralsund	0084	0084	0096	0086	0090

Die beiden Colonnen unter *C* sind nahezu identisch, weil die Werthe den mittleren Geburtenzahlen der einzelnen Bezirke proportional sind und diese in dem fünfjährigen Zeitraume nur eine geringe Veränderung erfahren haben. Auch die Präcisionen in den beiden Colonnen *Q* können daher als Näherungswerthe derselben Grösse für jeden Bezirk angesehen werden, und daher wurde zur besseren Vergleichung der Ergebnisse der beiden Methoden unter *MQ* die Mittelwerthe aus den zusammengehörenden Zahlen der beiden Colonnen *Q* beigefügt, obwohl diese Mittelwerthe, wegen des grösseren Gewichtes der Zahlen aus dem dreijährigen Zeitraum (grösser im Verhältniss von $\sqrt{3} : \sqrt{2}$) nicht eigentlich die wahrscheinlichsten Werthe der nach der physikalischen Methode bestimmten Präcisionen darstellen.

Bedenkt man nun, dass die Zahlen unter *Q* nur Wahrscheinlichkeitsbestimmungen und wegen der keineswegs sehr grossen Zahl der Versuchsreihen in jedem Bezirk (36 und 24) einem verhältnissmässig bedeutenden wahrscheinlichen Fehler ausgesetzt sind, so wird man die Uebereinstimmung der beiden Arten der Präcisionsberechnung für befriedigend halten dürfen. Wir finden demnach hier das Kriterium einer typischen Wahrscheinlichkeitsgrösse mit normaler Dispersion zutreffend. Die Mittelwerthe der vier Zahlenreihen unter *C* und *Q* sind in der ersten Tabelle resp. 0.0188; 0.0183; 0.0184; 0.0186, also sehr nahe gleich; in der zweiten aber sind sie sämmtlich = 0.0125.

Wenn in der ersten Tabelle die combinatorischen Präcisionen im Durchschnitt um eine Kleinigkeit grösser sind als die physikalischen, so ist dies durch zufällige Störungen zu erklären. Bemerkenswerth aber ist, dass nur zwei oder drei Mal die physikalische

Präcision erheblich grösser wird, als die combinatorische, nämlich bei Marienwerder 1868—69, bei Erfurt und allenfalls bei Trier 1870—72. Für den ersten und letzen Fall aber findet sich schon in dem anderen Theile des fünfjährigen Zeitraumes eine genügende Compensation, und auch die Differenzen bei Erfurt sind nach der Analogie aller übrigen Fälle wieder durch zufällige Störung, nicht aber durch die unbegreifliche Annahme einer verbundenen Massenerscheinung mit unternormaler Dispersion zu erklären.

44. Wenn nun wirklich die Zahl der Knabengeburten auf je 1000 Mädchengeburten eine typische Wahrscheinlichkeitsgrösse mit normaler Dispersion darstellt, so muss sich eine hinlänglich grosse Anzahl von Einzelwerthen dieser Ziffer auch der Function F_u entsprechend um den typischen Mittelwerth gruppiren. Für die Beobachtungen der Jahre 1868—69 habe ich dies in der mehrerwähnten Abhandlung gezeigt; aber auch die Ziffern aus der folgenden dreijährigen Periode bestätigen die Theorie.

Zur Aufstellung der theoretischen Gruppirung nehmen wir als gemeinschaftliche Präcision der Einzelbestimmungen von z in den grossen Bezirken den Mittelwerth der combinatorischen Präcisionen für 1870—72, also 0.0188, und in den kleinen Provinzen den Mittelwerth 0.0125 an. Dieses auch für die frühere Periode angewandte Näherungsverfahren ist für unsere Zwecke genau genug, da sich die einzelnen Präcisionen in den beiden Gruppen von Bezirken im Ganzen nicht sehr weit von dem betreffenden Mittel entfernen.

Als wahrscheinlichsten Werth des typischen Mittels nehmen wir die aus der Gesammtheit aller Geburten im Staate von 1870—72 abgeleitete Ziffer 1063 an, dieselbe, die auch für die Jahre 1868—69 gefunden wurde. Alsdann ergibt sich für die grossen Bezirke:

Abweichung.	Beobachtete Fälle.			Theorie.
±	—	+	±	±
0—19½	110½	113½	224	242
19½—39½	91	104	195	190
39½—59½	66	48	114	110
59½—79½	30	20	50	48
79½—99½	10	6	16	16
Ueber 99½	4	9	13	5

Die letzten Colonnen stehen in genügendem Einklange, zumal die theoretische Zahl der äussersten Abweichungen wegen der An-

nahme einer gemeinschaftlichen Mittel-Präcision nothwendig zu klein ausfallen muss. Auch die Symmetrie der positiven und negativen Abweichungen gestaltet sich recht befriedigend, wenn man die zweite und dritte Abweichungsstrecke zu einer einzigen zusammenfasst. Die Gesammtzahl der positiven Abweichungen beträgt 300½, die der negativen 311½.

Kleine Bezirke.

Abweichung.	Beobachtete Fälle.			Theorie.
±	—	+	±	±
0—19½	92	71	163	155
19½—39½	90	69	159	150
39½—59½	60	46	106	118
59½—79½	41	42	83	81
79½—99½	19	25	44	50
Ueber 99½	26	31	57	48

Die beiden letzten Colonnen stimmen wieder leidlich befriedigend zusammen. Weniger gut tritt die Symmetrie der positiven und der negativen Seite hervor, da die erstere nur 284, die letztere aber 328 Fälle aufweist.

45. Bei genauerer Untersuchung würden sich ohne Zweifel in den verschiedenen Landestheilen verschiedene typische Mittelwerthe nachweisen lassen, die aber im Ganzen nicht weit von einander abweichen würden, so dass man doch wieder ein Mittel aus diesen Mittel als Grundwerth für das ganze Land behandeln kann. Wir wollen wenigstens eines jener lokalen Mittel näher betrachten, nämlich das der Stadt Berlin, und zwar legen wir die 108 Monats-Werthe von z in dem Zeitraume 1865—73 zu Grunde.

In diesem Zeitraume wurden im Ganzen 140,037 Knaben und 132,433 Mädchen, zusammen also 272,470 Kinder geboren. Hieraus würde sich der wahrscheinliche Werth von z für Berlin zu 1057 ergeben. Das arithmetische Mittel aus den 108 monatlichen Werthen jedoch beträgt nur 1055, und diese Zahl kann man, indem man von der Verschiedenheit des Gewichts der Einzelbestimmungen absieht, ohne Bedenken als Ausgangspunkt nehmen.

Berechnet man mit diesem Mittelwerthe nach der Methode der kleinsten Quadrate die Präcision der Einzelbestimmung — allerdings eine umständliche Rechnung, da man 108 Fehlerquadrate zu bilden hat — so findet man als Werth derselben 0.0157. Auf dieser

Grundlage findet man dann eine sehr gute Uebereinstimmung zwischen der beobachteten und der theoretischen Vertheilung der Abweichungen. Dieselbe ist allerdings nicht erkennbar, wenn man sehr kleine Fehlerstrecken betrachtet. So ergibt z. B. die Beobachtung:

Abweichung.	Beobachtete Fälle.		
±	—	+	±
0—9½	9½	8½	18
9½—19½	10	6	16
19½—29½	8	10	18
29½—39½	7	8	15
39½—49½	2	8	10
49½—59½	5	5	10
59½—69½	5	1	6
69½—79½	3	4	7
79½—89½	1	0	1
89½—99½	2	4	6
Ueber 99½	1	0	1

Die positiven und negativen Abweichungen scheinen hier ganz regellos aufzutreten, was bei der geringen Grösse der einzelnen Zahlen nicht auffallen kann. Dagegen ergibt die Addition aller Fälle auf jeder Seite nahezu dieselbe Zahl, nämlich 54½ positive und 53½ negative Abweichungen. Und wenn man grössere Gruppen bildet, so erhält man:

Abweichung.	Beobachtete Fälle.			Theorie.
±	—	+	±	±
0—39½	34½	32½	67	67
39½—79½	15	18	33	33
Ueber 79½	4	4	8	8

Also hat man bei der Annahme des Mittelwerthes 1055 und der davon abgeleiteten Präcision 0.0157 eine fast vollständige Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung. Uebrigens ergeben sich nahezu dieselben Resultate, wenn man von dem Mittelwerthe 1057 ausgeht; es kommen dann auf die positive Seite 55 und auf die negative 53 Abweichungen.

Für die combinatorische Präcision bestimmen wir ebenfalls nur einen näherungsweise richtigen Mittelwerth,[1]) indem wir für g die

[1]) Bei Rechnungen dieser Art, die in grosser Zahl anzustellen sind und niemals genaue Uebereinstimmung mit den theoretisch erwarteten Resultaten er-

durchschnittliche monatliche Geburtenzahl in dem ganzen Zeitraume einsetzen, nämlich ·2523; nehmen wir ferner als möglichst genauen Werth von v 0.514 an, so erhalten wir die Präcision 0.0168. Die Abweichung derselben von der nach der andern Methode berechneten ist an sich eine mässige, besonders da beide nur Näherungswerthe sind. Wenn man aber bemerkt, das die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung mit dieser letzteren Präcision weniger vollständig ist (die theoretischen Zahlen unter $\pm$ werden nun: $70\frac{1}{2}$ — 31 — $6\frac{1}{2}$), so liegt die Vermuthung nahe, dasss die nach der ersten Methode berechnete Präcision die richtigere sei, und dass die combinatorische Präcision desswegen grösser erscheine, weil wir vielleicht mit einer typischen Wahrscheinlichkeitsgrösse mit etwas übernormaler Dispersion zu thun haben.

46. Um die sehr umständliche Berechnung der Präcision (oder auch des wahrscheinlichen Fehlers) aus der Summe der Fehlerquadrate zu vermeiden, empfiehlt Fechner die allerdings nicht ganz ebenso sichere Berechnung derselben aus der Summe der absoluten Abweichungen (indem also alle Abweichungen positiv genommen werden). Sie wird dann ausgedrückt durch die Formel $\frac{1}{\varepsilon_1 \sqrt{\pi}}$ wenn ε_1 das Mittel aus den absoluten Abweichungen bedeutet und das arithmetische Mittel einfach als der wahre Werth angesehen wird.

Auf diesem bequemen Wege würden wir die Präcision 0.0156 finden, kaum abweichend von der zuerst berechneten. Fechner hat auch eine allgemeine Formel angegeben, um möglichst den Fehler zu corrigiren, der dadurch begangen wird, dass man die Abweichungen vom arithmetischen Mittel als die wahren behandelt. Diese Correctur gewährt indess nur bei der Anwendung auf viele Fälle im Ganzen eine Verbesserung, im einzelnen Falle dagegen kann sie auch den Fehler vergrössern. So bringt sie im vorliegenden Beispiele die Präcision auf 0.0155.

---

geben, ist es wichtiger, rasch zu Näherungsresultaten, als langsam zu einer für unsere Zwecke nutzlosen Genauigkeit zu gelangen. Uebrigens könnte man ohne Schwierigkeit die Grenzen der Fehler feststellen, die dadurch begangen werden, dass man, wie es in diesem Paragraphen und auch später noch geschieht, die Verschiedenheit der Gewichte der Einzelbestimmungen nicht streng in Rechnung bringt.

Die grosse Uebereinstimmung der Präcisionsbestimmungen aus dem mittleren Fehlerquadrat und dem mittleren absoluten Fehler, wie wir sie eben gefunden haben, ist nun ein neuer Beweis dafür, dass die gegebenen 108 Einzelwerthe von z wirklich als zufällige Modificationen einer festen typischen Grösse anzusehen sind. Denn nur unter dieser Voraussetzung ist die Beziehung zwischen Fehlerquadraten und absoluten Fehlern vorhanden, welche die Gleichheit der Resultate der beiden Berechnungen erzeugt.

Eben diese Beziehung lässt sich nun noch frappanter ausdrücken durch die Formel $\pi = \frac{2\,n\,[\delta^2]}{[\delta]^2}$, wo n die Zahl der Einzelwerthe und $[\delta]^2$ das Quadrat der absoluten Fehlersumme bezeichnet. Man erhält also hier die Zahl π dargestellt durch die Abweichungen des Verhältnisses der Knaben- und Mädchengeburten von dem typischen Mittelwerthe.

In dem vorliegenden Beispiele finden wir in der That $\frac{208\,[\delta^2]}{[\delta]^2} = 3.1397$, also fast genau 3.14, was übrigens unmittelbar aus der nahen Uebereinstimmung der Präcisionsbestimmungen aus der Quadratsumme und der absoluten Summe folgt. Für die Fechner'sche Correction ist dies abermals ein nicht günstiger Einzelfall, da sie zu dem Resultate 3.147 führt.

Der typische Charakter der behandelten Wahrscheinlichkeitsgrösse ist somit ganz zweifellos; doch ist es nicht unmöglich, dass die zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt nicht ganz fest, sondern im Laufe der Zeit kleinen, aber zufälligen Schwankungen unterworfen ist, so dass die eigentliche typische Wahrscheinlichkeit vielmehr das Mittel aus diesen veränderlichen Wahrscheinlichkeiten wäre. Jedenfalls aber ist die Ueberschreitung der Grenzen der normalen Dispersion so wenig bedeutend, dass man sie bei allgemeinen, den ganzen Staat betreffenden Untersuchungen eben so ausser Acht lassen kann, wie die Thatsache, dass der wirkliche Werth von z für Berlin wohl jedenfalls um einige Einheiten kleiner ist, als die oben für den ganzen Staat angenommene Zahl 1063.

47. Da der Charakter einer Wahrscheinlichkeitsgrösse mit normaler Dispersion bei dem Geschlechtsverhältniss der Geborenen[1])

[1]) Statt dieses Verhältnisses kann man natürlich auch unmittelbar die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt als Untersuchungsobject nehmen. Es ist

sich weit schärfer ausdrückt, als bei irgend einer anderen statistischen Verhältnisszahl, die ich bisher untersucht habe, so ist zu vermuthen, dass die natürlichen Bedingungen der Geschlechtsbestimmung eine besonders nahe Analogie mit einem Glücksspiel mit constanten Chancen besitzen. Sind die Entstehungsbedingungen der Einzelfälle äusserst verschiedenartig und verwickelt, so ist es allerdings noch immer denkbar, dass die für unsere Analyse nicht auflösliche Totalität der Bedingungen des Ereignisses dennoch auf längere oder kürzere Zeitstrecken in einem Beharrungszustande bleibt und ihre Wirkungen solche sind, als wenn für die Frequenz des Ereignisses eine constant bleibende mathematische Wahrscheinlichkeit massgebend wäre. Aber Massenerscheinungen dieser Art sind wohl nur selten ausfindig zu machen, da von vornherein alle diejenigen nicht in diese Classe gehören können, welche durch irgend einen nachweisbaren, nicht rein zufällig (also z. B. periodisch) auftretenden Einfluss erheblich alterirt werden. Weit leichter aber kann jene Analogie mit einem Glücksspiel hervortreten, wenn ein enger umschriebener Bedingungscomplex angenommen werden darf, der jedem Einzelfalle in annähernd gleicher Weise zu Grunde liegt. Die Massenerscheinung erhält dann bis zu einem gewissen Grade den Charakter einer generischen, da ja eine Gleichartigkeit der Verursachung der Einzelfälle angenommen wird, doch bleibt der wichtige Unterschied von den eigentlichen generischen Massenerscheinungen, dass der wirksame Bedingungscomplex doch wieder ein für uns unauflöslicher und unübersehbarer bleibt. Am einfachsten ist es nun, wenn sich derselbe direct auf die Form eines Chancenspiels zurückführen lässt, und eben desswegen halte ich die in meiner früheren Abhandlung erörterte Hypothese über die Ursache der relativen Constanz des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen für die vorläufig empfehlenswertheste: es würden hiernach in jedem weiblichen Individuum für das männliche oder für

---

dies sogar eigentlich zweckmässiger, da in unserer Rechnung die Ableitung der Präcision des Geschlechtsverhältnisses aus derjenigen des Verhältnisses der Knabengeburten zur Gesammtheit der Geburten nur durch ein Näherungsverfahren erfolgt, also nicht ganz genau ist. Ich habe bisher das Geschlechtsverhältniss zu Grunde gelegt, weil es die herkömmliche Ziffer ist; bei weiteren Untersuchungen dürfte es sich jedoch empfehlen, von den empirischen Werthen der erwähnten Wahrscheinlichkeit auszugehen.

das weibliche Geschlecht angelegte Keime in näherungsweise demselben Verhältnisse der Befruchtung ausgesetzt, welches bei einer grossen Zahl von Knaben- und Mädchengeburten zu Tage tritt.[1]) Durch diese Hypothese wird nicht nur die ungefähre Constanz des Geschlechtsverhältnisses, sondern auch die weit merkwürdigere Vertheilung der Abweichungen vom Normalwerth erklärt. Wie die Verkleinerung des Normalverhältnisses bei den unehelichen Geburten unter dieser Voraussetzung wenigstens denkbarer Weise zu erklären wäre, habe ich am angeführten Orte angedeutet.

Hier dürfte nun auch die Frage von Interesse sein, ob die Beobachtungen über die Zwillingsgeburten mit dieser Hypothese vereinbar sind. Zunächst ist leicht zu zeigen, dass dies nicht der Fall sein könnte, wenn man eine Zwillingsgeburt wie zwei getrennte, ganz unabhängig von einander folgende Geburten behandeln wollte. Wenn in einer Urne schwarze und weisse Kugeln im constant bleibenden Verhältniss von 515 : 485 vorhanden sind, so hat man für die möglichen Ergebnisse zweier unabhängiger Züge folgende Wahrscheinlichkeiten:

schwarz-schwarz: $(0.515)^2$; schwarz-weiss: 0.515×0.485,
weiss-schwarz: 0.485×0.515; weiss-weiss: 0.485×0.485,
oder: schwarz-schwarz: 0.265, weiss-weiss: 0.235, und für das Herauskommen zweier verschiedener Farben ohne Rücksicht auf die Reihenfolge: $0.250 + 0.250$ oder 0.500.

Nun ist 0.515 die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, die wir in den letzten Jahren in Preussen herrschend gefunden haben; und wenn man den Zug einer schwarzen oder weissen Kugel mit einer Knaben- resp. Mädchengeburt parallelisirt, so sind die eben angeführten Verhältnisszahlen diejenigen, welche bei einer grossen Anzahl Gruppen von je zwei unabhängig auf einander folgenden Geburten für die drei verschiedenen Combinationen der Geschlechter zu Tage treten werden.

Nun zeigt sich aber bei Zwillingsgeburten in Wirklichkeit eine

---

[1]) Dass die Physiologen von ihrem Standpunkte nichts gegen diese Hypothese einzuwenden haben, ist aus der schon von W. Stieda (Sexualverhältniss, S. 5) angeführten Stelle aus Wagner's Physiol. Handwörterbuch zu schliessen. Uebrigens bleibt bei meiner Annahme die Frage ganz offen, ob die Keime an sich geschlechtlich bestimmt sind, oder ob die grössere oder geringere Reife des ausgetretenen Eies das Geschlecht bedingt, was der Thury'schen Hypothese entsprechen würde.

ganz andere Frequenz der drei Combinationen. Fassen wir die Zwillingsgeburten (Fälle, nicht Geborene) in den 8 alten Provinzen Preussens vom Jahre 1862 bis 1873 incl. zusammen, so finden wir:

2 Knaben: 38119 mal; 2 Mädchen: 35919 mal; 1 Kn. u. 1 M. 44169 mal, woraus sich empirisch die Wahrscheinlichkeiten dieser drei zusammengesetzten Ereignisse ergeben zu resp. 0.322; — 0.304; — 0.374, also Zahlen, die mit den oben angeführten nichts gemein haben. Nach den letzteren wäre z. B. bei der Hälfte aller Zwillingsgeburten, im vorliegenden Beispiele also in 59103.5 Fällen Geschlechtsverschiedenheit zu erwarten, während dieselbe thatsächlich nur in 44169 Fällen beobachtet worden ist.

48. Durch diesen Widerspruch, auf den bereits L. Moser gestossen ist, wird indess nur bewiesen, was von vornherein wahrscheinlich ist, dass Zwillingsgeburten nicht wie unabhängige Paare von Geburten anzusehen sind. Es scheint ohne Frage sehr natürlich, dass eine zweite Befruchtung, die sich unmittelbar an eine andere unter der denkbar grössten Gleichheit der Umstände anschliesst, mit einer gesteigerten Wahrscheinlichkeit dasselbe Geschlecht ergeben müsse, wie die erste. Wir betrachten hier die Zwillingsbefruchtung als bestehend aus einer ersten und einer zweiten Befruchtung, die durch eine beliebig klein anzunehmende Zeit getrennt sind, und wir bezeichnen mit x die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Befruchtung dasselbe Geschlecht ergibt, wie die erste; $1-x$ ist dann also die Wahrscheinlichkeit der Geschlechtsverschiedenheit. Am einfachsten ist es jedenfalls, dieses x als gleich anzunehmen, mag die erste Befruchtung männlich oder weiblich ausgefallen sein. Die Wahrscheinlichkeit des einen oder des anderen dieser beiden letzteren Fälle aber müssen wir, wenn wir unsere Hypothese über die Keime festhalten wollen, der überhaupt herrschenden Wahrscheinlichkeit einer Knaben- oder Mädchengeburt gleichsetzen. Folglich haben wir in unserem Beispiele folgende Wahrscheinlichkeiten:

2 Knaben $0.515x$; 2 Mädchen $0.485x$

1. Knabe, 2. Mädchen $0.515\ (1-x)$; 1. Mädchen, 2. Knabe $0.485\ (1-x)$.

Durch Vergleichung dieser hypothesischen Wahrscheinlichkeiten mit den oben angeführten empirischen aber erhält man:

$$0.515\,x = 0.322; \quad \text{also} \quad x = 0.625,$$
$$0.485\,x = 0.304; \quad x = 0.627,$$
$$(1-x) = 0.374; \quad x = 0.626.$$

Demnach ergeben die drei Gleichungen in der That fast genau denselben Werth von x, und wir haben daher einige Berechtigung zu sagen: Bei der ersten Befruchtung in einer Zwillingsconception bestimmt sich das Geschlecht nach derselben Wahrscheinlichkeit, die in dem betreffenden Lande auch bei einfachen Geburten massgebend ist; wie diese Bestimmung aber auch ausfällt, es besteht eine gesteigerte Wahrscheinlichkeit, und zwar in Preussen in der behandelten Periode die Wahrscheinlichkeit 0.626 dafür, dass die zweite Befruchtung dasselbe Geschlecht ergibt.[1])

Die obige Hypothese läuft übrigens einfach darauf hinaus, dass das Verhältniss der Zahl der Zwillingsgeburten von zwei Knaben zu der Zahl der Mädchen-Zwillingsgeburten dasselbe sein müsse, wie das Verhältniss der einfachen Knaben- und Mädchengeburten.[2]) Denn die Knabenzwillingsgeburten sollen proportional sein $0.515x$,

---

[1]) Ein Bild dieser Wahrscheinlichkeitsverhältnisse erhält man, wenn man annimmt, dass gewisse von den schwarzen und weissen Kugeln in der Urne (und zwar je ein gleicher Bruchtheil von jeder Classe) eine zweite Kugel in sich einschliessen, und zwar so, dass die eingeschlossenen Kugeln auf 1000 Doppelkugeln 626 mal dieselbe Farbe haben, wie die umschliessenden. Eine andere Vorstellung scheint sich besser mit den wirklichen physiologischen Vorgängen vergleichen zu lassen: nämlich die einer sehr langen Reihe von gleich grossen, neben einander liegenden Kugeln, in der aber immer mehrere gleichfarbige aufeinander folgen. Hat man nun zufällig eine von diesen Kugeln ergriffen, so wird es wahrscheinlicher sein, dass die nächstfolgende dieselbe Farbe habe, als dass sie ungleichfarbig sei. Aber dieses Bild lässt sich doch in solcher Einfachheit nicht festhalten, wenn man verlangt, dass die Wahrscheinlichkeiten der beiden Farben bei dem ersten Griffe verschieden, die Wahrscheinlichkeit der Gleichfarbigkeit der Nachbarkugel aber in beiden Fällen gleich sein soll. Jedenfalls kann das obige Resultat wieder mit der Vorstellung vereinbart werden, dass die Reife des Eies im Augenblick der Befruchtung irgendwie mit der Geschlechtsbestimmung zusammenhänge.

[2]) Man pflegte bisher hauptsächlich das Geschlechtsverhältniss der aus Zwillingsgeburten stammenden Individuen zu berücksichtigen, das, wie unsere Theorie sofort erkennen lässt, etwas kleiner wird, als das normale Verhältniss. So auch in der jüngst in Hildebrand's und Conrad's Jahrbüchern erschienenen Arbeit von M. Neeffe. Aus unserer Darlegung ist ersichtlich, welche Wichtigkeit der statistischen Erhebung der Zwillingsgeburten nach ihren drei möglichen Arten zukommt.

die Mädchenzwilligsgeburten proportional 0.485 x; das Verhältniss beider Zahlen wäre also $= \frac{0.515}{0.485}$, was dem normalen Geschlechtsverhältniss der Geborenen gleich ist.

49. Nun finden wir in der hier behandelten Periode in den alten Provinzen Preussens als Zahlen der Zwillingsgeburten mit Geschlechtsgleichheit und als Verhältnisszahl auf 1000 weibliche Zwillingsgeburten:

Jahr.	2 Kn.	2 Mädch.	Verh.	Jahr.	2 Kn.	2 Mädch.	Verh.
1862	2823	2549	1107	1868	3082	2959	1042
63	3093	2890	1070	69	3202	2926	1095
64	3274	3097	1057	70	3434	3173	1082
65	3199	3097	1033	71	2794	2499	1118
66	3104	3045	1019	72	3522	3261	1080
67	3149	3057	1022	73	3442	3366	1021

Das Verhältniss aus der Gesammtzahl der Zwillingsgeburten beider Geschlechter ergibt sich zu 1061, was in der That den normalen Wahrscheinlichkeiten 0.515 und 0.485 (auf 3 Stellen abgerundet) entspricht.

Nimmt man einfach das Mittel aus den zwölf Einzelverhältnissen, indem man von der nur unbedeutenden Verschiedenheit der Präcisionen der Einzelbestimmungen absieht, so erhält man 1063. Von diesem Werthe ausgehend, findet man nach der Methode der kleinsten Quadrate die Präcision 0.0208, während die combinatorische Methode, bei Anwendung einer Durchschnittszahl von 6170 jährlichen gleichgeschlechtlichen Zwillingsgeburten, die Präcision 0.0261 liefert. Diese beiden Präcisionsbestimmungen weichen nun allerdings einigermassen von einander ab, so dass es fraglich erscheinen kann, ob die obigen Verhältnisszahlen als typische Wahrscheinlichkeitsgrössen mit normaler und nicht vielmehr mit übernormaler Dispersion anzusehen sind. Indess ist die erste Bestimmung auf Grund einer einzigen Reihe von nur 12 Einzelwerthen eine ziemlich unsichere, und die Differenz beider Werthe wird noch ziemlich mässig erscheinen, wenn man die Grösse der Unterschiede berücksichtigt, die sich in anderen Fällen bei ähnlichen Rechnungen herausstellen. Die Annahme einer normalen Dispersion ist also noch keineswegs ausgeschlossen.

Was die Zwillingsgeburten mit verschiedenen Geschlechtern betrifft, so würden dieselben nach dieser Theorie immer annähernd

0.374 der jährlichen Gesammtzahl der Zwillingsgeburten ausmachen müssen. Zur Vergleichung von Beobachtung mit Berechnung diene die folgende Zusammenstellung der Geburten dieser Art:

Jahr	beobachtet	berechnet	Jahr	beobachtet	berechnet
1862	3285	3238	1868	3462	3554
63	3590	3580	69	3595	3637
64	3797	3803	70	3804	3894
65	3828	3786	71	3258	3198
66	3678	3675	72	4179	4100
67	3642	3683	73	4051	4061

Die Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung sind also sehr mässig und mit der Annahme jener festen Wahrscheinlichkeit wohl vereinbar.

50. Mit welchem Grade von relativer Genauigkeit bei dem Geschlechtsverhältnisse der Geborenen das durch die doppelte Präcisionsbestimmung gewonnene Kriterium zutrifft, lässt sich am besten durch die vergleichende Untersuchung anderer Verhältnisszahlen taxiren, die man gewissermassen stillschweigend als Wahrscheinlichkeitsgrössen anzunehmen pflegt. Die Zahl der Gestorbenen im Alter von 0—1 Jahr dividirt durch die Zahl der Geborenen, aus denen diese Verstorbenen hervorgegangen sind, bezeichnet man ohne Weiteres als empirische Darstellung der Sterbenswahrscheinlichkeit im ersten Altersjahre. Aber verhalten sich die Schwankungen dieses Verhältnisses von einer Jahresgeneration zur andern wirklich so, als wenn eine feste mathematische Wahrscheinlichkeit zu Grunde läge? Wir wollen diese Frage an einem Beispiele aus der belgischen Statistik näher erörtern. In der folgenden Tabelle findet man unter *G* die Zahl der in den angegebenen Jahren lebend geborenen Knaben oder Mädchen; unter *A* die von diesen Jahresgenerationen gelieferten Gestorbenen im Alter von 0—1 Jahr (erste Hauptgesammtheiten); [1]) unter *B* zur Vergleichung die (aus zwei Generationen stammenden) Gestorbenen der ersten Altersclasse aus

[1]) Die belgischen statistischen Documente zerlegen (bis zum Jahre 1867) die Verstorbenen der ersten Altersclasse nach den Sterbemonaten, combinirt mit den Altersmonaten. Aus diesen kleinen Gruppen kann man mit hinreichender Genauigkeit (unter Halbirung der zweifelhaft gestellten) die Elementargesammtheiten und somit die ersten Hauptgesammtheiten zusammensetzen. Die obige Berechnung derselben ist von einigen meiner Dorpater Zuhörer ausgeführt worden.

dem angeführten Kalenderjahre, also „dritte" Hauptgesammtheiten, welche nach der Hermann'schen Methode an die Stelle der bisher meistens noch nicht bestimmbaren ersten Hauptgesammtheiten gesetzt werden; unter α die Quotienten aus den Zahlen unter A und der entsprechenden Geburtenzahl, also die möglichst correct bestimmten empirischen Sterbenswahrscheinlichkeiten im ersten Altersjahre; unter β die Quotienten aus den Zahlen unter B und den Geburtenzahlen, also die Näherungswerthe der Sterbenswahrscheinlichkeiten nach der Hermann'schen Methode.

Knaben.

Jahr	G	A	B	α	β
1847	60539	10217	10254	0.1688	0.1694
48	61952	9517	9501	0.1536	0.1534
49	68093	10941	10949	0.1607	0.1608
50	67240	10632	10184	0.1580	0.1515
51	68739	10866	11219	0.1581	0.1632
52	69234	11160	11062	0.1612	0.1598
53	65570	10313	10419	0.1573	0.1589
54	67408	11723	11062	0.1739	0.1641
55	64630	11073	11809	0.1713	0.1827
56	68848	11530	11010	0.1675	0.1599
57	73369	14020	13332	0.1911	0.1817
58	74292	13369	13390	0.1800	0.1802
59	76525	13460	14285	0.1759	0.1867
60	74368	11851	11361	0.1594	0.1528
61	75674	13356	13399	0.1765	0.1771
62	74868	12354	12191	0.1650	0.1628
63	79825	14143	13664	0.1772	0.1710
64	80022	14739	14278	0.1843	0.1784
65	79942	15862	16271	0.1984	0.2035

Mädchen.

Jahr	G	A	B	α	β
1847	57567	8142	8234	0.1411	0.1430
48	58431	7528	7521	0.1288	0.1287
49	65012	8701	8661	0.1338	0.1332
50	64176	8430	8320	0.1314	0.1296
51	65509	8515	8591	0.1300	0.1311

Jahr	*G*	*A*	*B*	*α*	*β*
1852	65163	8824	8888	0.1354	0.1364
53	62158	8143	8144	0.1310	0.1310
54	64429	9271	8736	0.1439	0.1356
55	61325	8863	9393	0.1445	0.1532
56	65339	9379	8888	0.1435	0.1360
57	69922	11145	10792	0.1594	0.1543
58	70782	10458	10403	0.1478	0.1470
59	73287	10701	11459	0.1460	0.1564
60	70300	9274	8702	0.1319	0.1558
61	71579	10679	10696	0.1492	0.1498
62	70700	9758	9708	0.1380	0.1373
63	75739	11210	10788	0.1480	0.1424
64	75850	11962	11457	0.1577	0.1511
65	76381	12871	13297	0.1685	0.1741

Die Ergebnisse der correcteren Berechnung weichen in den einzelnen Jahren von denen der Hermann'schen Näherungsmethode ziemlich beträchtlich ab; fasst man indess die ganze neunzehnjährige Strecke zusammen, so findet man unter *A* 231,126 Knaben und 183,854 Mädchen, unter *B* aber 229,640 Knaben und 182,678 Mädchen. Die Gesammtzahl der Geburten beläuft sich auf 1,351,138 Knaben und 1,283,649 Mädchen, so dass wir als Mittelwerth des Sterblichkeitsverhältnisses α erhalten 0.1711 beim männlichen und 0.1432 beim weiblichen Geschlecht, während der Näherungswerth β sich auf resp. 0.1700 und 0.1423 stellt.

51. Wir halten uns hier selbstverständlich an die genaueren Werthe α. Die oben angeführten Mittelwerthe 0.1711 und 0.1432 wären als die theoretisch strengen wahrscheinlichsten Werthe der Sterbenswahrscheinlichkeit der Knaben und Mädchen im ersten Altersjahre anzusehen, wenn diese Sterbenswahrscheinlichkeit eine Constante von typischen Charakter mit normaler Dispersion wäre. Denn dann würden die Gewichte der einzelnen Jahreswerthe der Quadratwurzel aus der zugehörigen Geburtenzahl proportional sein. Wenn aber die abstracte Sterbenswahrscheinlichkeit selbst von Jahr zu Jahr zufälligen Schwankungen ausgesetzt ist, d. h. wenn die Dispersion der Abweichungen eine übernormale ist, so ist jene Annahme über das Gewicht der Einzelwerthe theoretisch nicht mehr begründet. Da sich nun schon aus einem vorläufigen Ueberschlage

ergibt, dass wir im vorliegenden Falle mit einer übernormalen Dispersion zu thun haben, und da überdies die Quadratwurzeln aus der grössten und kleinsten Geburtenzahl nicht allzu sehr verschieden von einander sind, so genügt es für unsere Zwecke, wenn wir der Einfachheit wegen die Methode der kleinsten Quadrate so anwenden, als wenn alle Einzelwerthe gleiche Präcision hätten. Wir gehen daher auch von dem arithmetischen Mittel der Werthe α aus, das bei den Knaben 0.1704 beträgt. Verwandelt man die obigen Werthe α durch Multiplication mit 10000 in ganze Zahlen, so ergibt die Methode der kleinsten Quadrate bei den Knaben den wahrscheinlichen Fehler 83.15 und die Präcision 0.0057. — Durch die eine oder die andere dieser beiden Grössen wird die wirkliche Dispersion der Abweichungen charakterisirt, unter der einzigen Voraussetzung, dass die Einzelwerthe zufällige Modificationen eines Mittelwerthes seien.

Wenn aber die untersuchten Werthe typische Wahrscheinlichkeitsgrössen mit normaler Dispersion wären, so würde sich der wahrscheinliche Fehler auf 9.5 und die Präcision auf 0.0501 berechnen![1]) Mit andern Worten, die wirkliche Dispersion ist neun Mal so gross, als die normale! Hiernach wird man die Uebereinstimmung würdigen, die zwischen den beiden Arten von Präcisionsbestimmungen bei dem Geschlechtsverhältniss der Geborenen besteht.

Selbst wenn man die am meisten abweichenden Einzelbestimmungen der Sterbenswahrscheinlichkeit, nämlich die den Geburtsjahren 1857 und 1865 entsprechenden, ganz von der Rechnung ausschliesst, so würde sich die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmte Präcision doch nur auf ungefähr 0.0076 erhöhen, während auch die combinatorische Methode ein von dem vorher gefundenen nur wenig verschiedenes Resultat ergäbe, so dass die gänzliche Unzulässigkeit der Annahme einer normalen Dispersion noch eben so grell hervorträte. Jene Ausschliessung zweier Werthe aber wäre überdies eine durch Nichts gerechtfertigte Willkür.

Man darf übrigens sogar fragen, ob die hier untersuchten Sterblichkeitsverhältnisse auch nur als typische Wahrscheinlichkeitsgrössen mit übernormaler Dispersion angesehen werden dürfen, ob

[1]) Es ist bei dieser Näherungsrechnung die mittlere jährliche Geburtenzahl 71113 und die Sterbenswahrscheinlichkeit 0.1711 zu Grunde gelegt.

sie nicht einfach symptomatische Verhältnisszahlen sind, die sich gar nicht in die Wahrscheinlichkeitstheorie einfügen, also trotz ihrer nicht grossen Verschiedenheiten nicht einmal nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt werden können. Es zeigt sich in der That im Ganzen in ihrer Reihe eine Tendenz zum Anwachsen mit der Zeit, die mit der Voraussetzung bloss zufälliger Störungen nicht wohl vereinbar ist. Indess lässt sich aus 19 Einzelwerthen noch keine bestimmte Entscheidung dieser Frage geben. Die Zahl der positiven Abweichungen von dem Mittel 1704 ist 9, die der negativen 10; innerhalb der Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers $\pm$ 83 liegen 8, ausserhalb desselben 11 Fälle; der Ausdruck $\frac{38\,[\delta^2]}{[\delta]^2}$ gibt 2.9 statt π: alle diese Indicien lassen wenigstens die Möglichkeit des Vorhandenseins eines typischen Mittels offen; jedenfalls aber ist die Zerstreuung der Einzelwerthe eine weit grössere, als wenn sie durch ein Glücksspiel mit constanten Chancen bestimmt worden wäre.

Um dieselbe Entscheidung in Betreff der Sterblichkeitsverhältnisse der Mädchen zu geben, bedürfen wir nur eines summarischen Ueberschlags: aus dem Mittelverhältniss 0.1432 und der durchschnittlichen Geburtenzahl 67560 findet man nach der combinatorischen Methode den wahrscheinlichen Fehler der (mit 10000 multiplicirten) Einzelwerthe gleich $\pm$ 9.1; die Beobachtung aber ergibt zwischen den Grenzen 1422.9 und 1441.1 nur 2, ausserhalb derselben aber 17 Fälle. Ferner hat man auf Grund jener Daten nach derselben Methode die der Gewissheit fast gleiche Wahrscheinlichkeit 0.999978 dafür, dass die Abweichungen vom wahren Werthe nach beiden Seiten nicht über 57.26 hinausgehen; wir finden aber zwischen den Grenzen 1374.74 und 1489.26 nur 7, ausserhalb derselben aber 12 Einzelwerthe, und wenn wir auch bei diesen Grenzbestimmungen den wahrscheinlichsten statt des wahren Werthes substituirt haben, so genügt das Resultat doch vollkommen zur Rechtfertigung der Behauptung, dass auch hier die Dispersion der Abweichungen eine weit grössere ist, als die normale, wie sie bei einem Glücksspiel mit constanten einfachen Chancen vorkommt. Auch sind wieder Zweifel an der Zulässigkeit der Methode der kleinsten Quadrate gestattet, da hier ebenfalls im Ganzen eine Tendenz zum Wachsen bei den Sterblichkeitsverhältnissen obzuwalten scheint.

52. Behandeln wir nun nach denselben Principien ein Beispiel aus der eigentlichen Moralstatistik.

Die absoluten Jahresziffern der Selbstmorde in den Culturländern bilden entschieden nur eine symptomatische, descriptive Reihe, die mit gewissen gesellschaftlichen Evolutionen parallel läuft. Dividirt man diese Zahlen durch die der geichzeitigen Bevölkerung, so könnte man diese Verhältnisse allenfalls in dem oben dargelegten Sinne als empirische Werthe von zusammengesetzten Totalwahrscheinlichkeiten betrachten; da man aber die abstracten Wahrscheinlichkeiten im Grossen und Ganzen von Jahr zu Jahr um eine veränderliche Grösse wachsend annehmen müsste, so wäre eine nutzbringende theoretische Behandlung jener Verhältnisse nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung doch nicht möglich, weil man weder mit zufälligen Aenderungen eines typischen Werthes, noch mit einer Grösse zu thun hat, die nach einer bekannten Norm mit der Zeit fortschreitet.[1]

Eher aber könnte man vermuthen, dass die relative Frequenz einer bestimmten Selbstmordart sich als typische Wahrscheinlichkeitsgrösse nachweisen lasse. Die absolute und relative Gesammtzahl der Selbstmorde mag sich symptomatisch vermehren, aber die ausserordentlich zahlreichen und mannigfaltigen Ursachen, welche die zum Selbstmorde Entschlossenen zu der Wahl eines bestimmten Mittels führen, könnten gerade wegen ihrer Mannigfaltigkeit und grossen Zahl einen relativ constanten Bedingungscomplex bilden, der in seinen Wirkungen das Chancenspiel bei einer constanten Wahrscheinlichkeit nachahmt. Zur Prüfung dieser Vermuthung sind im Folgenden nach den französischen Comptes généraux de l'administration de la just. crim. zusammengestellt: unter S die jährliche Gesammtzahl der männlichen Selbstmörder und unter E der Bruchtheil derselben, der sich ertränkt hat.

Männer.

Jahr	S	E	Jahr	S	E
1835	1784	0.257	1838	1886	0.283
36	1775	0.293	39	2049	0.290
37	1811	0.277	40	2040	0.287

[1] Eine hypothetische Annahme über das Fortschreiten der Wahrscheinlichkeit wäre zwecklos, weil völlig willkürlich.

Jahr	S	E	Jahr	S	E
1841	2139	0.298	1855	2836	0.269
42	2129	0.286	56	3161	0.258
43	2291	0.314	57	2970	0.276
44	2197	0.289	58	3050	0.236
45	2332	0.285	59	3057	0.262
46	2329	0.295	60	3076	0.251
47	2781	0.296	61	3399	0.264
48	2567	0.264	62	3767	0.271
49	2736	0.290	63	3637	0.248
50	2723	0.250	64	3599	0.248
51	2737	0.280	65	4009	0.236
52	2780	0.292	66	4169	0.247
53	2536	0.276	67	4008	0.240
54	2707	0.257	68	4736	0.218

53. Im Ganzen zeigen die Verhältnisszahlen unter *E* eine Tendenz zum Sinken; besonders in der letzten Periode des Kaiserreiches scheinen volkspsychologische Einflüsse dem Selbstmorde durch Ertränkung entgegenzuwirken. Schon dieser äusserlich hervortretenden Evolution wegen können die Zahlen unter *E* nicht als empirische Werthe einer constanten typischen Wahrscheinlichkeit angesehen werden.

Aber es wäre möglich, dass diese Zahlen auf kleineren Zeitstrecken sich wie zufällige Modificationen einer festen Wahrscheinlichkeit verhielten.

Betrachten wir die 15jährige Strecke 1835—49, so finden wir sowohl als arithmetisches Mittel der Einzelverhältnisse, wie auch als Verhältniss der Gesammtzahl der Erträнkungen zur Gesammtzahl der Selbstmorde den Werth 0.287.

Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich dann aus jenen 15 Einzelwerthen, wenn wir von ihrer Gewichtsverschiedenheit absehen und sie durch Multiplication mit 1000 zu ganzen Zahlen machen, der wahrscheinliche Fehler $= \pm\ 9.19$, und die Präcision der Einzelbestimmung $= 0.0519$.

Die combinatorische Methode aber führt bei Anwendung der durchschnittlichen Selbstmordziffer 2190 zu dem wahrscheinlichen Fehler $\pm\ 6.52$ und der Präcision 0.0731.

Die beiden Arten der Präcisionsbestimmung liefern also zwar nicht so enorm verschiedene Resultate, wie sie in dem Beispiele

aus der Sterblichkeitsstatistik zu Tage treten, aber die Differenz ist doch beträchtlich grösser, als die, welche sich durchschnittlich bei der Untersuchung des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen herausstellt.

Besonders aber ist zu beachten, dass diese 15jährige Reihe von vornherein mit Rücksicht darauf ausgewählt ist, dass die Abweichungen vom Mittel nicht zu gross würden. Nähme man nur noch das Resultat des Jahres 1850 hinzu, so würde sich der Unterschied zwischen den beiden Präcisionsbestimmungen noch weiter vergrössern.

In der 15jährigen Serie 1850—64 finden wir das arithmetische Mittel der Einzelverhältnisse = 0.263 und das Summenverhältniss = 0.262. Die Methode der kleinsten Quadrate ergibt unter denselben Bedingungen wie oben: wahrsch. Abw. ± 10.07; Präcision 0.0474.

Nach der combinatorischen Methode dagegen findet man mit der mittleren Selbstmordziffer 3069 als wahrscheinliche Abweichung ± 5.35, als Präcision 0.0891. Mithin zeigt sich abermals eine recht beträchtliche Differenz beider Präcisionsbestimmungen, die noch bedeutend grösser werden würde, wenn man der Beobachtungsreihe auch die Verhältnisszahlen der Jahre 1865—68 hinzufügen wollte.

54. Wir lassen hier noch folgen die entsprechenden Ziffern für die

Frauen.

Jahr	*E*	*S*	Jahr	*S*	*E*
1835	521	0.472	1848	734	0.437
36	565	0.476	49	847	0.484
37	632	0.486	50	873	0.435
38	700	0.453	51	861	0.473
39	698	0.520	52	894	0.454
40	712	0.426	53	879	0.438
41	675	0.490	54	993	0.456
42	737	0.459	55	974	0.448
43	729	0.519	56	1028	0.472
44	776	0.470	57	997	0.467
45	752	0.440	58	853	0.402
46	773	0.451	59	842	0.462
47	866	0.440	60	974	0.418

Jahr	S	E	Jahr	S	E
1861	1055	0.445	1865	937	0.418
62	1003	0.429	66	950	0.443
63	976	0.445	67	1003	0.406
64	922	0.396	68	1171	0.371

Es zeigt sich hier noch deutlicher als in der vorhergehenden Tabelle eine langsam sich entwickelnde Abnahme der relativen Häufigkeit des Selbstmordes durch Ertränken. Das Mittel der Verhältnisszahlen beträgt in der 11jährigen Periode 1835—45: 0.474; in der 12jährigen Periode 1846—57: 0.455 und in der 11jährigen Periode 1858—68 nur noch 0.421. Von einer in der ganzen Reihe constanten oder nur zufällig veränderlichen relativen Wahrscheinlichkeit dieser Selbstmordart kann also keine Rede sein. Wenn wir aber die oben angeführten Zeitstrecken für sich betrachten, so finden wir, das Tausendstel wieder als Einheit genommen, nach der Methode der kleinsten Quadrate *(a)* und der combinatorischen Methode *(b)* folgende Präcisionen:

1835—45: *(a)* 0.024; *(b)* 0.037;
1846—57: 0.0435; 0.0423;
1858—68: 0.032; 0.045.

In der mittleren Periode stimmen also die beiden Werthe nicht nur sehr nahe zusammen, sondern die erste Methode gibt sogar eine etwas grössere Präcision als die zweite. Indess darf man desswegen nicht auf eine unternormale Dispersion und eine „verbundene“ concrete Massenerscheinung schliessen. Denn erstens sind die Präcisionsbestimmungen *(a)* unsicher wegen der geringen Zahl der Einzelwerthe, und zweitens sind die Perioden absichtlich so abgegrenzt worden, dass sie möglichst wenig divergirende Einzelwerthe einschliessen. In Wirklichkeit dauert in jeder die Entwicklung in abnehmender Richtung fort, aber dieselbe ist so langsam, dass sich auf kürzere Strecken nur ein solcher Grad von Divergenz der Einzelwerthe zeigt, wie er bei einer typischen Wahrscheinlichkeitsgrösse mit mässig übernormaler oder annähernd normaler Dispersion zu erwarten wäre. Damit ist übrigens noch nicht einmal bestimmt erwiesen, dass die Verhältnisszahlen in jeder Periode wirklich den Charakter von typischen Wahrscheinlichkeitsgrössen besitzen. Um dies erkennen zu lassen, ist ihre Zahl zu klein, und doch kann man auch der fortschreitenden Entwicklung wegen die Theilstrecken nicht grösser machen.

Kurz, auch die relative Häufigkeit einer Selbstmordart lässt sich, trotz der auf den ersten Blick oft auffallend gross erscheinenden Stabilität der empirischen Verhältnisszahlen nicht in befriedigender Weise auf das Schema der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückführen; es zeigt sich eine symptomatische Entwicklung in bestimmter Richtung, und nur in kürzeren Zeitstrecken, während welcher diese Entwicklung nicht merklich ist, bleiben die Chancen in einem solchen Schwebezustand, dass die Divergenz der Einzelverhältnisse nicht allzu weit über die normale hinausgeht.

55. Schliesslich wollen wir auch noch ein Beispiel untersuchen, bei dem es auf die Sicherheit einer verstandesmässigen Entscheidung ankommt. Ich meine das Verhältniss der Zahl der Freigesprochenen zu der Zahl der vor die Geschworenen gestellten Angeklagten (nicht der Anklagen) in Frankreich.[1] Die Daten für die drei ersten Jahre sind Poisson, die übrigen den bereits erwähnten Comptes généraux de la just. crim. entnommen.

Jahr	Angekl.	Freigespr.	Jahr	Angekl.	Freigespr.
1825	6652	0.393	1840	8226	0.334
26	6988	0.378	41	7462	0.328
27	6929	0.389	42	6953	0.324
28	7396	0.385	43	7226	0.324
29	7373	0.393	44	7195	0.319
30	6962	0.407	45	6685	0.334
31	7606	0.461	46	6908	0.329
32	8237	0.435	47	8704	0.338
33	7315	0.423	48	7352	0.415
34	6952	0.401	49	6983	0.397
35	7223	0.390	50	7202	0.374
36	7232	0.361	51	7071	0.333
37	8094	0.368	52	7096	0.312
38	8014	0.322	53	7317	0.277
39	7858	0.356	54	7556	0.249

[1]) Die „Verurtheilungs-Wahrscheinlichkeit“ setzt sich zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten, dass sowohl die Voruntersuchung als die Geschworenen hinsichtlich der Schuld des Angeklagten sich irren oder nicht irren; die Ergänzung derselben zu 1 ist die „Freisprechungs-Wahrscheinlichkeit“, die sich zusammensetzt aus der Wahrscheinlichkeit, dass die Voruntersuchung sich irrt und die Geschworenen sich nicht irren, und der Wahrscheinlichkeit, dass die Voruntersuchung sich nicht irrt und die Geschworenen sich irren.

Jahr	Angekl.	Freigespr.	Jahr	Angekl.	Freigespr.
1855	6480	0.250	1862	4990	0.256
56	6124	0.254	63	4543	0.251
57	5773	0.243	64	4252	0.240
58	5375	0.225	65	4154	0.221
59	4902	0.250	66	4551	0.232
60	4651	0.245	67	4607	0.228
61	4813	0.252	68	4528	0.234

Die ganze Reihe der Verhältnisszahlen der Freigesprochenen ist offenbar als eine symptomatische und descriptive aufzufassen. Sie zeigt deutlich Reactionen, die durch Veränderungen in der Gesetzgebung, theilweise auch durch die politischen Erschütterungen hervorgerufen sind. Die Verhältnisszahlen der Jahre 1825—30 zeigen geringe Schwankungen, nur das Revolutionsjahr 1830 zeichnet sich durch eine grössere Quote von Freigesprochenen aus. Unter den Angeklagten dieses Jahres befanden sich auch einige (16), die auf Grund des Gesetzes vom 8. October 1830 wegen politischer Verbrechen vor die Geschworenen gestellt wurden; 8 von diesen wurden freigesprochen.

Diese erste Periode ist zu kurz, als dass sie die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach unserem Verfahren zuliesse. Poisson hat sich mit den Ergebnissen derselben aus einem anderen Gesichtspunkte beschäftigt. Einen scharfen Abschnitt bildet das Jahr 1831, mit dem man eine bis 1836 reichende Uebergangsperiode beginnen kann. Das Gesetz vom 4. Mai 1831 verlangte mindestens 8 Stimmen für die Verurtheilung, was sofort eine Steigerung der Quote der Freisprechungen hervorrief. In entgegengesetzter Richtung jedoch wirkte das Gesetz vom 28. April 1832, das den Geschworenen das Recht übertrug, mildernde Umstände anzunehmen. Durch die beiden Gesetze vom 9. September 1835 wurden die Pressvergehen den Geschworenen-Gerichten entzogen und wieder die Verurtheilung durch einfache Majorität ermöglicht, daher in den nächstfolgenden Jahren eine weitere erhebliche Abnahme der Freisprechungen.

Uebrigens ist zu bemerken, dass im Jahre 1832 nicht weniger als 672 und 1833 noch 351 Angeklagte wegen politischer Verbrechen vor den Geschworenen standen, von denen resp. 462 und 234 freigesprochen wurden. Schliesst man diese aus, so erhält man als Verhältnisszahl der Freigesprochenen nur resp. 0.412 und 0.411.

In den übrigen Jahren ist die Zahl der politischen Angeklagten so gering, dass sie hier nicht besonders unterschieden zu werden brauchen.

Eine Periode verhältnissmässiger Stabilität bilden die 12 Jahre 1836—47. Die Verhältnisszahlen der Freisprechungen scheinen oberflächlich betrachtet sehr nahe constant, und dennoch ergibt die genauere Untersuchung, dass die Dispersion der Abweichungen entschieden eine übernormale ist. Zu demselben Resultat gelangt man sogar noch, wenn man die Ergebnisse der Jahre 1836 und 1837 von der Rechnung ausschliesst.

Die Jahre 1848—53 bilden wieder ein Intermezzo mit ganz concretem Charakter. Das Decret vom 6. März 1848 forderte neun Stimmen zur Verurtheilung und überwies den Geschworenen auch wieder die Pressvergehen. Nach dem Decret vom 18. October 1848 aber waren wieder 8 Stimmen zur Verurtheilung ausreichend. Nach Erlass des Gesetzes vom 9. Juni 1853, das wieder die einfache Majorität entscheidend machte (vorbehaltlich des Rechtes des Gerichtshofs, die Sache eventuell an eine neue Jury zu verweisen) geht die Quote der Freisprechungen noch weiter zurück, zeigt aber nun bis zum Schluss der Reihe wieder eine anscheinend sehr grosse Gleichmässigkeit. Nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet sich indess (die Tausendstel als Einheit genommen) die Präcision auf nur 0.0623, während die combinatorisehe Methode auf Grund einer durchschnittlichen jährlichen Zahl von 5153 Angeklagten eine fast doppelt so grosse Präcision, nämlich 0.1184 ergibt. Selbst wenn man die etwas stärker abweichenden vier letzten Jahre ausschliesst, gelangt man nach der ersten Methode mit Hülfe der Jahresergebnisse von 1854—64 nur zu der Präcision 0.0712. Die Werthe des Freisprechungsverhältnisses divergiren folglich auch in kürzeren Zeiträumen, in denen wir keinen tief eingreifenden äusseren Einfluss nachweisen können, stärker untereinander, als es bei der Annahme einer constanten „Freisprechungs-Wahrscheinlichkeit“ zu erwarten wäre.

Es sei hier noch im Allgemeinen bemerkt, dass die Präcisionsbestimmung aus dem mittleren Fehlerquadrat selbst bei nur zehn oder sogar noch weniger Einzelwerthen eine zweckmässige Charakteristik der thatsächlich vorliegenden Dispersion dieser Werthe bildet, die durch Vergleichung mit der combinatorischen Präcisionsbestimmung ein noch bestimmteres Urtheil gestattet. Dagegen ist

der Schluss auf den allgemeinen Charakter der untersuchten Wahrscheinlichkeitsgrössen, d. h. auf die Normalität oder Abnormität ihrer Dispersion überhaupt, bei so geringer Zahl der Einzelwerthe natürlich sehr unsicher.

56. Nach meinen bisherigen Untersuchungen, die freilich noch zu vervollständigen sind, glaube ich nun folgende Sätze aufstellen zu dürfen:

Wirklich typische Reihen, sei es von absoluten oder von Wahrscheinlichkeitsgrössen, sind in den menschlichen Massenerscheinungen verhältnissmässig nur selten nachzuweisen. Die Lebenslänge der Normalgruppe und das Geschlechtsverhältniss der Geborenen bieten gut charakterisirte Beispiele der einen und der anderen Art dar, die freilich beide überwiegend die physische Seite des Menschenlebens betreffen.

Es scheint, dass typische Reihen nur bei solchen Massenerscheinungen auftreten, bei denen entweder in jedem Einzelfalle eine annähernd gleiche Tendenz zur Erreichung eines bestimmten Zieles vorhanden ist, oder in denen in jedem Einzelfalle ein gleichartiger Bedingungscomplex zu Grunde liegt, der so wirkt, als wenn eine gemeinschaftliche, constante, oder nur zufällig um ein Mittel oscillirende Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen des Ereignisses massgebend wäre. Von den eigentlich generischen unterscheiden sich diese letztern Massenerscheinungen dadurch, dass wir die gleichartigen Bedingungscomplexe der Einzelfälle nicht weiter auflösen können.

Sind die Bedingungscomplexe der Einzelfälle selbst sehr verschiedenartig und mannigfaltig, so kann allerdings dennoch das Totalsystem aller Bedingungen in einem Beharrungszustande[1]) bleiben, in welchem wieder die Analogie eines Glücksspiels mit gegebenen Chancen zutrifft.

Dieser Fall liegt aber unzweifelhaft nicht vor, wenn die Einzelwerthe des Verhältnisses nachweislich durch nicht zufällige Einwirkungen beeinflusst sind, oder wenn sich auch nur thatsächlich eine weiter nicht zu erklärende Periodicität oder eine längere Zeit

---

[1]) Beharrungszustand ist, im Gegensatz zu dem bewegungslosen Gleichgewichtszustande, der dauernd gleichbleibende innere Bewegungszustand eines Systems bei ebenfalls gleichbleibenden äusseren Beziehungen.

hindurch dauernde Zunahme oder Abnahme der Einzelwerthe bemerklich macht.

Unter diesen letzteren Voraussetzungen aber ist die untersuchte statistische Reihe keine typische, sondern eine symptomatische, und man kann schon jetzt mit Bestimmtheit behaupten, dass die menschlichen Massenerscheinungen ganz überwiegend zu Reihen dieser Art führen. Die Verkettung der menschlichen Dinge wirkt ihrer Natur nach meistens auf Veränderungen in einem bestimmten Sinne hin; der Zustand des vorhergehenden Jahres ist mitbedingend und mitbestimmend für den neuen Zustand des folgenden, und daher sind auch die Zahlenverhältnisse, welche die zeitlich aufeinanderfolgenden Zustände einer gewissen Art mehr oder weniger charakterisiren, nicht unabhängig von einander, wie zufällige Modificationen einer festen Wahrscheinlichkeitsgrösse, sondern jedes vorhergehende bildet im Allgemeinen den Ausgang für die Veränderung des folgenden.

Formell freilich kann man jeden Einzelwerth einer symptomatischen Reihe ebenfalls als Näherungswerth einer abstracten Wahrscheinlichkeitsgrösse betrachten; aber da man dann weiter annehmen muss, dass sich die zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeit selbst von Jahr zu Jahr oder von irgend einer Zeitmassstrecke zur andern in einer uns unbekannten Weise ändert, so ist mit solcher Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes wenig gewonnen. Mögen dann auch die Einzelwerthe streckenweise nur geringe Schwankungen aufweisen, sie fügen sich doch nicht in das Schema der Wahrscheinlichkeitsrechnung, es sei denn, dass auf der ganzen betrachteten Strecke die Annahme einer nur wenig, wenn auch in bestimmter Richtung veränderlichen abstracten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses gestattet wäre.

In diesem letzteren Falle wäre die Dispersion der Einzelwerthe eine annähernd normale, aber sie könnte möglicher Weise grösser sein, als sie sich bei stärkerer Veränderlichkeit der abstracten Wahrscheinlichkeit in derselben Zeitstrecke vielleicht herausgestellt hätte. Denn gerade durch die Veränderlichkeit der zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeit kann in kleineren Bruchstücken der Reihen eine unternormale Dispersion auftreten; aber solche Erscheinungen sind dann als Zufälle anzusehen, und sie beweisen noch keineswegs das Vorhandensein von verbundenen concreten Massenerscheinungen, in denen die Einzelwerthe vermöge einer

inneren Beziehung unter sich in abnorm engen Grenzen gehalten würden. Zu dieser letzteren Annahme wäre man nur genöthigt, wenn bei einer grösseren Anzahl aufeinanderfolgender Einzelwerthe durch das Kriterium *c)* des § 20 mit voller Sicherheit eine unternormale Dispersion nachgewiesen würde. Nach allen bisherigen Erfahrungen aber darf man die Möglichkeit eines solchen Nachweises kühn in Abrede stellen. Die straffste Formel, in welche sich menschliche Massenerscheinungen — und zwar nur wenige Arten derselben — erfahrungsmässig einfügen lassen, ist die der normalen Dispersion; und in diesem Falle ist die Unabhängigkeit des Einzelereignisses gegenüber den durch eine mathematische Wahrscheinlichkeit ausgedrückten Möglichkeitsbedingungen desselben noch ebenso gross, wie die Unabhängigkeit des einzelnen Wurfes eines Würfels in einer grossen Reihe von Versuchen, in der näherungsweise jede der sechs Nummern gleich häufig herauskommt. Befände sich selbst die Menschheit in einem Beharrungszustande, so würde für alle Seiten dieses Zustandes, die sich durch statistische Zahlenverhältnisse charakterisiren liessen, höchstens jene Formel gelten, und so würde sich noch in befriedigender Weise die Freiheit der Einzelhandlung mit den Existenzbedingungen des Ganzen vereinbaren. Aber Beharrung ist im Leben der Menschheit nur die Ausnahme, die Regel ist Evolution in aufsteigender oder absteigender Richtung; die menschliche Gesellschaft ist fortwährend in Thätigkeit, um aus eigener Kraft und mit eigener Verantwortlichkeit die Grundlagen des Zustandes zu ändern, der übrigens, auch wenn er bestehen bliebe, für das Individuum nicht ein zwingendes Gesetz, sondern nur Bedingungen seines Handelns aufstellen würde.

Anhang.

Zur Ausführung der theoretischen Berechnungen, wie sie beispielsweise S. 48 vorkommen, genügt schon die folgende abgekürzte Tabelle des im Texte als F_u bezeichneten Integrals

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$$

u	F_u	u	F_u	u	F_u
0.00	0.000	0.25	0.276	0.50	0.521
0.01	0.011	0.26	0.287	0.51	0.529
0.02	0.023	0.27	0.297	0.52	0.538
0.03	0.034	0.28	0.308	0.53	0.546
0.04	0.045	0.29	0.318	0.54	0.555
0.05	0.056	0.30	0.329	0.55	0.563
0.06	0.068	0.31	0.339	0.56	0.572
0.07	0.079	0.32	0.349	0.57	0.580
0.08	0.090	0.33	0.359	0.58	0.588
0.09	0.101	0.34	0.369	0.59	0.596
0.10	0.112	0.35	0.379	0.60	0.604
0.11	0.124	0.36	0.389	0.61	0.612
0.12	0.135	0.37	0.399	0.62	0.619
0.13	0.146	0.38	0.409	0.63	0.627
0.14	0.157	0.39	0.419	0.64	0.635
0.15	0.168	0.40	0.428	0.65	0.642
0.16	0.179	0.41	0.438	0.66	0.649
0.17	0.190	0.42	0.447	0.67	0.657
0.18	0.201	0.43	0.457	0.68	0.664
0.19	0.212	0.44	0.466	0.69	0.671
0.20	0.223	0.45	0.475	0.70	0.678
0.21	0.234	0.46	0.485	0.71	0.685
0.22	0.244	0.47	0.494	0.72	0.691
0.23	0.255	0.48	0.503	0.73	0.698
0.24	0.266	0.49	0.512	0.74	0.705

u	F_u	u	F_u	u	F_u
0.75	0.711	1.10	0.880	1.45	0.960
0.76	0.718	1.11	0.884	1.46	0.961
0.77	0.724	1.12	0.887	1.47	0.962
0.78	0.730	1.13	0.890	1.48	0.964
0.79	0.736	1.14	0.893	1.49	0.965
0.80	0.741	1.15	0.896	1.50	0.966
0.81	0.748	1.16	0.899	1.51	0.967
0.82	0.754	1.17	0.902	1.52	0.968
0.83	0.760	1.18	0.905	1.53	0.970
0.84	0.765	1.19	0.908	1.54	0.971
0.85	0.771	1.20	0.910	1.55	0.972
0.86	0.776	1.21	0.913	1.56	0.973
0.87	0.781	1.22	0.916	1.57	0.974
0.88	0.787	1.23	0.918	1.58	0.975
0.89	0.792	1.24	0.921	1.59	0.975
0.90	0.797	1.25	0.923	1.60	0.976
0.91	0.802	1.26	0.925	1.62	0.978
0.92	0.807	1.27	0.928	1.64	0.980
0.93	0.812	1.28	0.930	1.66	0.981
0.94	0.816	1.29	0.932	1.68	0.982
0.95	0.821	1.30	0.934	1.70	0.984
0.96	0.825	1.31	0.936	1.72	0.985
0.97	0.830	1.32	0.938	1.74	0.986
0.98	0.834	1.33	0.940	1.76	0.987
0.99	0.839	1.34	0.942	1.78	0.988
1.00	0.843	1.35	0.944	1.80	0.989
1.01	0.847	1.36	0.946	1.82	0.990
1.02	0.851	1.37	0.947	1.84	0.991
1.03	0.855	1.38	0.949	1.86	0.991
1.04	0.859	1.39	0.951	1.88	0.992
1.05	0.862	1.40	0.952	1.90	0.993
1.06	0.866	1.41	0.954	1.95	0.994
1.07	0.870	1.42	0.955	2.00	0.995
1.08	0.873	1.43	0.957	2.05	0.996
1.09	0.877	1.44	1.958	2.10	0.997

Inhalt.

Gedruckt bei Friedrich Wagner in Freiburg i. Br.



